Ό,τι ονειρεύεσαι γίνεται!

ΠΑΠΑΔΕΑ+

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) ,με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 ,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής .Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$,τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) .

Μονάδες 8

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 3

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<<Έστω $f:\mathrm{R}^* \to R$ συνεχής συνάρτηση . Αν ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathrm{R}^*$, τότε η είναι σταθερή στο R^*>>.

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής** , ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής.**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση ,την λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ** ,αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\alpha > 0$ τότε **:** $\left(\alpha^{x}\right)' = x \cdot \alpha^{x-1}$

β. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$ και υπάρχει $x_0 \in \left(\alpha, \beta\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$,τότε θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0 ,τότε η συνάρτηση $f + g$ δεν είναι συνεχής στο x_0 .

ε. Αν $c > 0$ και $a < \beta$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - a$ και ύψος c.

Μονάδες 5x2=10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \dfrac{e}{e^{x} + 1}, x \in R$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της f^{-1}.

Αν $h(x) = f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{e - x}{x}\right), x \in (0, e)$,

τότε :

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα.

Β3. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Μονάδες (6+5+8+6)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$ με σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty,-1]$, για την οποία ισχύει :

$$f'(x)+e^{x-2}=\frac{1}{x-1} \text{ , για κάθε } x>1.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(2)=-1$

Γ2. Να δείξετε ότι

$$f(x)=\ln(x-1)-e^{x-2} \quad ,x\in(1,+\infty)$$

και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα ,τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να λύσετε στο διάστημα $(1,+\infty)$ την εξίσωση

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}+\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}+\left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)}=9$$

Γ4. Να δείξετε ότι

$$(x+1)\cdot f(x^2)>f(x^3)+\mathrm{x}\cdot f(x) \text{ , για κάθε } x\in(1,+\infty)$$

Μονάδες (7+8+5+5)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}\text{ , } x>0$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{3}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με

$0<\rho_1<1<\rho_2$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$3f(x_0)=1+f'(x_0)$.

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 xe^{-x}dx$ και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$\int_1^2 f(x)dx<\frac{2e-3}{e^2}$.

Δ4. Αν F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ να αποδειχθεί ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$F(x+1)+F(\mathrm{x}+3)<2F(\mathrm{x}+2)$

Μονάδες (6+6+6+7)