ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΝΑΤΑΣΑ ΠΑΠΑΓΟΥΛΑ, ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΟΓΙΟΠΟΥΛΟΣ, ΒΑΣΙΛΗΣ ΖΑΦΕΙΡΗΣ, ΒΑΣΙΛΗΣ ΤΣΙΜΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΒΕΡΕΜΗΣ, ΗΛΙΑΣ ΚΟΥΝΤΟΥΠΗΣ

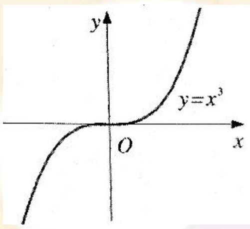
ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό θεωρία σελ. 76

Α2. σχολικό θεωρία σελ. 104

Α3. **α)** Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύει ότι η παράγωγός της $f'(x)=3x^2$ είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0)=0$.



Α4. **α)** Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1.

$D_f=(1,+\infty)$

$D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \ \textit{και} \ g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \ \textit{και} \ e^x>1\}=\{x\in\mathbb{R} \ \textit{και} \ x>0\}$

Άρα $D_{fog}=(0,+\infty)$

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

Β.2.

$$(\text{fog})(\text{x}) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \quad x > 0$$

Η (fog)(x) είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$(\text{fog})'(\text{x}) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1}\right)' = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$(e^x - 1)^2 > 0$ για κάθε $x > 0$

$-3e^x < 0$ για κάθε $x > 0$

Άρα (fog)΄(x)<0 για κάθε $x > 0$. Επομένως η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

$$(fog)(A) = \left(\lim_{x\to+\infty}(fog)(x), \lim_{x\to 0^+}(fog)(x)\right) = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(fog)(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x - 1}\cdot(e^x + 2) = +\infty \cdot 3 = +\infty$$

Για $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$ άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

Θέτουμε (fog)(x)=y⇔ y=$\frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow y(e^x - 1) = e^x + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{2+y}{y-1} \Leftrightarrow$

$x = ln\frac{2+y}{y-1} \Leftrightarrow$ $(\text{fog})^{-1}$(x)=$ln\frac{2+y}{y-1}$

$$D_{fog^{-1}} = (fog)(A) = (1, +\infty)$$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα

Β.3.

Η $\varphi(x) = ln\frac{x+2}{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = \left(ln\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{-3}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)}$$

Για $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \; και \; x + 2 > 3 > 0$

Άρα $\varphi'(x) < 0$. Επομένως η $\varphi(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

Β.4.

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+} ln\frac{x+2}{x-1} = \lim_{u\to +\infty} lnu = +\infty$$

Θέτουμε : $u = \frac{x+2}{x-1}$ και $u_0 = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}(x+2) = +\infty \cdot 3 = +\infty$

Για $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ Άρα $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty} ln\frac{x+2}{x-1} = \lim_{u\to 1} lnu = 0$$

Θέτουμε : $u = \frac{x+2}{x-1}$ και $u_0 = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\chi}{x} = 1$

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της , θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = \frac{1}{1-0} - \ln\lambda \Leftrightarrow$

$$1 - \ln\lambda = \lambda = 1 - \ln\lambda \Leftrightarrow 1 - \ln\lambda = \lambda$$

Παρατηρούμε ότι μία λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι ο $\lambda=1$ και θα αποδείξουμε ότι λύση αυτή είναι μοναδική. Πράγματι θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(\lambda) = 1 - \ln\lambda - \lambda$, $\lambda > 0$, με $g'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$, $\lambda > 0$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και η λύση $\lambda=1$ είναι μοναδική. Τότε θα έχουμε : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Γ2. Προφανώς $f(0) = \frac{1}{1-0} - \ln 1 = 1$ και για να δείξουμε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της Cf στο σημείο A(0,1) , θα πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.Πράγματι:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{(1-x)}=1 \quad \text{και}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ημx+συνx-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{ημx}{x}+\frac{συνx-1}{x}\right)=1+0=1$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με f΄(0)=1 και επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Α(0,1). Η εξίσωση της θα είναι : (ε): $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=1\cdot x\Leftrightarrow y=1\cdot x+1$.Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι λ=1=εφω, οπότε $ω=\frac{π}{4}$

Γ3. Προφανώς $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}, & x<0\\ 1, & x=0\\ συνx-ημx, & 0<x<\frac{3π}{2}\end{cases}$. Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της f αναζητούμε τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f που η f΄ δεν ορίζεται ή η f΄μηδενίζεται. Επειδή η f είναι παντού παραγωγίσιμη , τα κρίσιμα σημεία θα τα βρούμε εκεί που θα ισχύει :f΄(x)=0.

Για x<0 προφανώς f΄΄(x)>0, Άρα f΄(x)=0

$$f'(x)=0\Leftrightarrow ημx-συνx=0\Leftrightarrow ημx=συνx\Leftrightarrow συν\left(\frac{π}{2}-x\right)=συνx\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{π}{2}-x=2κπ+x, & κ\in Z\\ \frac{π}{2}-x=2κπ-x, & κ\in Z\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{π}{4}-κπ, κ\in\mathbb{Z}$$

Θα πρέπει $0<x<\frac{3π}{2}\Leftrightarrow 0<\frac{π}{4}-κπ<\frac{3π}{2}\Leftrightarrow -\frac{5}{4}<κ<\frac{1}{4}\Leftrightarrow κ=0, κ=-1$, Αρα x=$\frac{π}{4}$ ή x=$\frac{5π}{4}$.

Επομένως η f έχει κρίσιμα σημεία στα x=$\frac{π}{4}$ και x=$\frac{5π}{4}$

Γ4. Η εξίσωση εφαπτομένης της Cf στο σημείο Μ(α,f(α)) με α<0 δίνεται από τον τύπο:

(η): $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\cdot(x-\alpha)$ και επειδή η ευθεία (η) τέμνει τον xx΄ στο σημείο

Β(β,0), οι συντεταγμένες του σημείου Β θα επαληθεύουν την (η).Δηλαδή:

$$0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\cdot(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \beta = 2\alpha - 1$$

Οπότε : $\beta(t) = 2\alpha(t) - 1 \Rightarrow \beta'(t) = 2\alpha'(t) \Rightarrow \beta'(t) = 2\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right) \Rightarrow \beta'(t_0) = 2\left(-\frac{\alpha(t_0)}{3}\right) = 2\left(-\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3}\,{}^{\mu o\nu}\!/_{sec}$,

αφού $\alpha(t_0)=-1$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ1.

Η $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = \mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής, με $f'(x) = e^x + 2x - e$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής με $f''(x) = e^x + 2 > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,οπότε και στο $\Delta = (0,1)$. Οπότε $f'(\Delta) = (1-e, 2)$

$0 \in f'(\Delta)$ άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό, αφού είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$

Είναι $f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Rightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$

Τότε

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 \Rightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Δ2.

Για $x \neq x_0$ έχουμε $\eta\mu(\frac{1}{x-x_0}) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu(\frac{1}{x-x_0}) \geq -1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)}$ (1)

Εφόσον $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο της f έχουμε $f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0 και

$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$.

Οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$ και $\lim_{x\to x_0}(-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)})=+\infty$ (2).

Οπότε από 1 και 2 είναι $\lim_{x\to x_0}(\eta\mu(\frac{1}{x-x_0})+\frac{1}{f(x)-f(x_0)})=+\infty$.

Δ3.

Έστω $g(x)=f(x)+x-x_0$, $x\in[x_0,1]$ συνεχής.

$g(x_0)=f(x_0)<0$ γιατί $x_0<1\Rightarrow f(x_0)<f(1)=0$

$g(1)=1-x_0>0,(x_0\in(0,1))$

Είναι $g(x_0)g(1)<0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ρίζα $\rho\in(x_0,1)$ της $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)+x=x_0$

$g'(x)=f'(x)+1>0$, γιατί με $x>x_0$ είναι $f'(x)>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,1]$ οπότε η ρίζα της ρ είναι μοναδική.

Δ4.

Είναι $0<x_0<\rho<1$ με $f(\rho)=x_0-\rho$ από Δ3.

- Το ζητούμενο γράφεται $f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)f'(\kappa)\Rightarrow f(x_0)-f(\rho)>(x_0-\rho)f'(\kappa)$

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ)

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$

Είναι $0<x_0<\xi<\rho<\kappa<1$ και f' γνησίως αύξουσα άρα

$$f'(\xi)<f'(\kappa)\Rightarrow\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)\Rightarrow f(x_0)-f(\rho)>(x_0-\rho)f'(\kappa)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)>f(\rho)(f'(\kappa)+1),\kappa\in(\rho,1)$$