ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	
ΤΜΗΜΑ	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat για μια συνάρτηση f που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

Μονάδες 7

Α2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως πώς ορίζεται η σύνθεση της f με την g ;

Μονάδες 3

Α3. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της Cf . Πώς ορίζουμε την εφαπτομένη της Cf στο σημείο της Α ;

Μονάδες 3

Α4.

i. Να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί στον ισχυρισμό ο οποίος δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από την παρακάτω πρόταση.
" Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ= [0,3] και ισχύουν :
$f(0)=2, f(1)=1, f(3)=-1$ " τότε :

α) υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$

β) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$

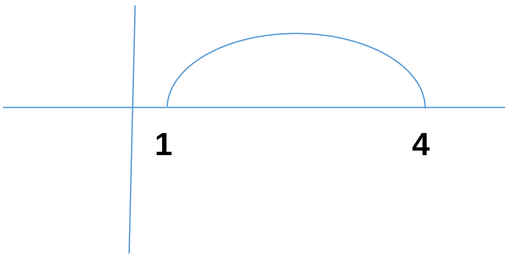
γ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$

ε) η μέγιστη τιμή της f στο Δ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1

Μονάδα 1

ii. Να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί στον ισχυρισμό ο οποίος προκύπτει κατ' ανάγκη από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που δίνεται από το παρακάτω σχήμα :



α) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το (1,4)

β) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το [1,4]

γ) ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,4)$

δ) υπάρχει $x_0 \in (1,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 1

Α5. Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί στον καθένα, το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

Μονάδα 1 για κάθε απάντηση

Κατόπιν, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο παράδειγμα (τύπο συνάρτησης και γραφική παράσταση)

Μονάδα 1,5 για κάθε απάντηση

α) Αν ισχύει $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

β) Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f δεν διακόπτεται ποτέ.

γ) Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f είναι συνεχής στα x = α και x = β .

δ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, δεν μπορεί να έχει με την εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ και άλλο κοινό σημείο εκτός του Α.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού είναι 50 gr και σε 6 ώρες, λόγω διάσπασης, έχουν απομείνει $50e^{-2}$ gr. Η ποσότητα που διασπάται είναι Q(t) και μεταβάλεται με ρυθμό ανάλογο της ποσότητας που απομένει.

Β1. Να αποδείξετε ότι $Q(t) = 50 - 50e^{-\frac{t}{3}}, t \geq 0$.

Μονάδες 4

Β2. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Q αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 3

β) Αν $Q^{-1}(t) = -3\ln(1 - \frac{t}{50}), t \in [0, 50)$ και $g(t) = 50t, t \geq 0$ να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $Q^{-1} \circ g$.

Μονάδες 3

Β3. Αν $(Q^{-1} \circ g)(t) = -3\ln(1-t), t \in [0,1)$ και για τη συνάρτηση $h(t) = \begin{cases} (Q^{-1} \circ g)(t), 0 \leq t < 1 \\ e^t(2t^2 + \alpha t + \beta), t < 0 \end{cases}$

ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο [-1,0] και η h δεν έχει κρίσιμο σημείο το t = 0 στο $(-\infty,1)$, να βρείτε τα α,β.

Μονάδες 5

Β4. Αν β = 0 και α = 3 να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 5

Β5. Για $t\in[-\frac{3}{2},0]$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(t)=e^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$, είναι αδύνατη.

Μονάδες 2

β) Να λύσετε την ανίσωση $4h(t)+4t^2+4t\leq -1-4e^{-\frac{1}{2}}$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln[(e^{\lambda}-1+\ln(\lambda+1))x^3+x^2+2]-\ln(x^2+1),x\in\mathbb{R}$,όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda\geq 0$.   .

Γ1. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός .

Μονάδες 5

Γ2. Με λ = 0

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{\ln|x|}$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\eta\mu(f(x)-x^2)]$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x_0+e^x)-f(x_0)}{e^x+\frac{1}{xe^{-x}}},x_0\in\mathbb{R}$

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta \in (-1,1)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha)=f(\beta)=\dfrac{2f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})}{3}$, ότι είναι μόνο αυτοί και είναι αντίθετοι (αριθμοί).

Μονάδες 8

δ) Θεωρούμε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει $(g^2(x)+2)e^{-(x+e^x)}-g^2(x)=1,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε την g ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\alpha^x-x-1, \alpha>0$.

Δ1. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x-1\geq x$, να βρείτε τον α.

Μονάδες 4

Με α = e

Δ2. α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=x+1$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$. Κατόπιν να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το παραπάνω συμπέρασμα χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις δύο βασικών συναρτήσεων.

Μονάδες 2

Δ3. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η οριζόντια διάσταση του ορθογωνίου είναι, με $x>0$, $\beta=\pi f(x)$, η ακτίνα του ημικύκλιου r και η περίμετρος του στίβου $4\pi f(1)$ μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου μέρους να γίνει μέγιστο.

β

Μονάδες 8

Δ4. Κινητό Μ ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $C: y=f(x), x<0$. Όταν ο ρυθμός μεταβολής των συντεταγμένων του δίνεται από τον τύπο $y'(t)=-\dfrac{1}{2}x'(t)\neq 0,$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $xOM=\omega$ με δεδομένο ότι η ταχύτητα απομάκρυνσης του από τον $x'x$ είναι $2cm/sec$.

Μονάδες 5