Λύσεις διαγωνίσματος προσομοίωσης 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142-143

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142-143

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 94

Α4.

i. ε) (Σχολικό βιβλίο ερώτηση 3, σελίδα 85)
ii. δ) (Σχολικό βιβλίο ερώτηση 10, σελίδα 178)

Α5. α) Α (Σχολικό βιβλίο ερώτηση 10, σελίδα 84)
Απόδειξη

Για κάθε x κοντά στο x_0 ισχύει : $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} -|f(x)|$. Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

β) Ψ
Παράδειγμα

Η $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ αλλά η C_f διακόπτεται στο $x = 0$ αφού το είναι ένωση διαστημάτων και όχι ένα διάστημα

γ) Ψ
Παράδειγμα

$$h(x) = \begin{cases} x-1, x<0 \\ x, 0 \le x \le 1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$$

δ) Ψ
Παράδειγμα

Έστω $f(x) = x^3$,με $f'(x) = 3x^2$ και Α (1,1) τότε η εξίσωση εφαπτομένης της στο Α είναι :
$y-1 = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x-2$ και τα κοινά της σημεία με την είναι το Α (1,1) αλλά και το Β (-2, -8)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού από την αρχική ποσότητα των 50 gr του ραδιενεργού υλικού διασπάται ποσότητα $Q(t)$, η ποσότητα που απομένει είναι 50 - $Q(t)$ και ισχύουν : $Q'(t)=\lambda(50-Q(t)),(1),t\geq 0$, $Q(0)=0,(2),Q(6)=50-50e^{-2},(3)$.

$$(1)\Leftrightarrow Q'(t)+\lambda Q(t)=50\lambda \Leftrightarrow e^{\lambda t}Q'(t)+e^{\lambda t}\lambda Q(t)=50\lambda e^{\lambda t}\Leftrightarrow (e^{\lambda t}Q(t))'=(50e^{\lambda t})',t\geq 0$$

Οι συναρτήσεις $e^{\lambda t}Q(t)$, $50e^{\lambda t}$ είναι συνεχείς στο $\Delta=[0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμες, άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $t\in\Delta$ να ισχύει $e^{\lambda t}Q(t)=(50e^{\lambda t})+c\Leftrightarrow Q(t)=50+ce^{-\lambda t}$

Έχουμε : $Q(0)=50+c\Leftrightarrow c=-50$

$$Q(6)=50+ce^{-\lambda 6}\Leftrightarrow e^{-6\lambda}=e^{-2}\Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$$

Άρα $Q(t)=50-50e^{-\frac{t}{3}},t\geq 0$

Β2. α) Είναι $Q'(t)=\frac{50}{3}e^{-\frac{t}{3}}>0,t\geq 0$, άρα η Q είναι γνησίως αύξουσα οπότε 1-1.

Άρα υπάρχει η αντίστροφη της Q και έχει $D_{Q^{-1}}=Q(\Delta)=[0,50)$, γιατί

$$\lim_{t\to+\infty}Q(t)=\lim_{t\to+\infty}(50-50e^{-\frac{t}{3}})=50$$

Έχουμε : $Q(t)=y,t\in\Delta,y\in Q(\Delta)$. Άρα

$$50-50e^{-\frac{t}{3}}=y\Leftrightarrow 50-y=50e^{-\frac{t}{3}}\Leftrightarrow \frac{50-y}{50}=e^{-\frac{t}{3}}\Leftrightarrow t=-3\ln(1-\frac{y}{50})$$

Οπότε $Q^{-1}(t)=-3\ln(1-\frac{t}{50}),t\in[0,50]$.

β) Για να βρούμε την $Q^{-1}\circ g$ αναζητούμε

$$A=\{t\in D_g\ /\ g(t)\in D_{Q^{-1}}\}=\{t\in[0,+\infty)\ /\ 50t\in[0,50)\}=[0,1)$$

Άρα $D_{Q^{-1}\circ g}=A$ και για κάθε $t\in A$ είναι

$$(Q^{-1}\circ g)(t)=Q^{-1}(g(t))=-3\ln(1-\frac{50t}{50})=-3\ln(1-t)$$

Β3. $h(t)=\begin{cases}-3\ln(1-t),0\leq t\leq 1\\ e^t(2t^2+\alpha t+\beta),t<0\end{cases},D_h=(-\infty,1)$

- Εφόσον για την h ισχύει το ΘΜΤ στο [-1, 0] πρέπει να είναι συνεχής στο [-1, 0] και παρ/μη στο (-1, 0). Η h είναι συνεχής στο [-1, 0] ως γινόμενο των συνεχών e^t , $2t^2+\alpha t+\beta$ (πολυώνυμο). Οπότε πρέπει

  $$\lim_{t\to 0^-} h(t)=h(0) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0^-} e^t(2t^2+\alpha t+\beta)=0 \Leftrightarrow \beta=0$$

  Επίσης η h είναι παρ/μη στο (-1,0) ως γινόμενο παρ/μων.

- Η h δεν έχει κρίσιμο σημείο το t = 0, εσωτερικό σημείο του D_h , άρα πρέπει να είναι παρ/μη σ' αυτό και η παράγωγος της να μην είναι 0. Δηλαδή πρέπει

  $$\lim_{t\to 0^-}\frac{h(t)-h(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{h(t)-h(0)}{t-0}\in\mathbb{R}^*(4)$$

  Έχουμε

  $$\lim_{t\to 0^-}\frac{h(t)-h(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t(2t^2+\alpha t)}{t}=\lim_{t\to 0^-}e^t(2t+\alpha)=\alpha$$

  $$\lim_{t\to 0^+}\frac{h(t)-h(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-3\ln(1-t)}{t}\overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\, u=1-t}{\underset{t\to 0\Rightarrow u\to 1}{=}}\lim_{u\to 1}\frac{-3\ln(u)}{1-u}=\lim_{u\to 1}\frac{3(\ln u-\ln 1)}{u-1}=3$$

  Άρα $\alpha=3$.

B4. $h(t)=\begin{cases}-3\ln(1-t), 0\le t\le 1\\ e^t(2t^2+3t), t<0\end{cases}, D_h=(-\infty,1)$

- Συνέχεια h
  Η h είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ από Β3
  Η h είναι συνεχής στο (0,1) ως σύνθεση των συνεχών $1-t$ και $-3\ln t$.
  Η h είναι συνεχής στο 0, ως παρ/μη.
  Τελικά η h είναι συνεχής στο $D_h=(-\infty,1)$.
- Παράγωγος h
  Η h είναι παρ/μη στο $(-\infty,0)$ από Β3
  Η h είναι παρ/μη στο (0,1) , αφού $1-t$ παρ/μη άρα $-3\ln t$ παρ/μη και

  $$h'(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{1-t}, 0<t<1\\ e^t(2t^2+7t+3), t<0\end{cases}$$

- Πίνακας προσήμου και μονοτονίας – ακρότατων h

*Πίνακας **Error! No text of specified style in document.**-1*

t	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1
h'	+	-	+	+	
h	↗	↘	↗	↗	

B5. α) Παρατηρούμε ότι $e^{\alpha} > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Έστω

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow e^{t}(2t^2 + 3t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \text{ ή } t = 0$$

Οπότε $h(t) \le 0 \Leftrightarrow t \in [-\frac{3}{2}, 0]$.

Επομένως η εξίσωση $h(t) = e^{\alpha}$ είναι αδύνατη στο $[-\frac{3}{2}, 0]$.

β)

- Για $t \in [-\frac{3}{2}, 0]$ η h παρουσιάζει μέγιστο το $h(-\frac{3}{2}) = h(0) = 0$ και ελάχιστο το $h(-\frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}}$,άρα ισχύει $h(t) \ge -e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow h(t) + e^{-\frac{1}{2}} \ge 0, (6), t \in [-\frac{3}{2}, 0]$
- $4h(t) + 4t^2 + 4t \le -1 - 4e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow [h(t) + e^{-\frac{1}{2}}] + (t + \frac{1}{2})^2 \le 0$

  $\Leftrightarrow h(t) = -e^{-\frac{1}{2}} \text{ και } t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = \ln[(e^{\lambda} - 1 + \ln(\lambda + 1))x^3 + x^2 + 2] - \ln(x^2 + 1) = \ln\frac{(e^{\lambda} - 1 + \ln(\lambda + 1))x^3 + x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

Θέτω $u = \dfrac{(e^{\lambda} - 1 + \ln(\lambda + 1))x^3 + x^2 + 2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$, $\quad h(\lambda) = e^{\lambda} - 1 + \ln(\lambda + 1), \lambda \ge 0$

και βρίσκουμε ρίζες και πρόσημο της h.

- Η h είναι παρ/μη στο $[0,+\infty)$ ως άθροισμα και γινόμενο παρ/μων , άρα και συνεχής, με $h'(\lambda)=e^{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda+1}>0$. Οπότε h γνησίως αύξουσα και αφού $h(0)=0$, έχουμε λ=0 μοναδική της ρίζα.

  Άρα

  I. με $\lambda>0 \Leftrightarrow h(\lambda)>0$

     είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^{\lambda}-1+\ln(\lambda+1))x^3}{x^2}=+\infty$

     και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, απορρίπτεται

  II. με λ=0 , $u=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}=1$

     και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

     Άρα λ=0.

Γ2. $f(x)=\ln\dfrac{x^2+2}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$

α) Η f είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παρ/μων, άρα και συνεχής, με

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

Είναι

- $f'(x)>0$ στο $(-\infty,0)$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$
- $f'(x)<0$ στο $(0,+\infty)$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$, το $f(0)=\ln 2$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

  Άρα $f(\mathbb{R})=(0,\ln 2]$.

β)

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\ln|x|}f(x)\right)=0$

ii. Θέτω $u=f(x)$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

iii. Έχουμε

$$\left|f(x)\eta\mu(f(x)-x^2)\right| \le \left|f(x)\right| \Leftrightarrow -\left|f(x)\right| \le f(x)\eta\mu(f(x)-x^2) \le \left|f(x)\right|$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\left|f(x)\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \left|f(x)\right| = 0$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)\eta\mu(f(x)-x^2)] = 0$.

iv. Θέτω $u = e^x$, με $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $x = \ln u$

Άρα

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x_0+e^x)-f(x_0)}{e^x + \dfrac{1}{xe^{-x}}} = \lim_{u\to0} \frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u+\dfrac{u}{\ln u}} = \lim_{u\to0} \frac{\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}}{1+\dfrac{1}{\ln u}} = f'(x_0)$$

γ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \ln\dfrac{(-x)^2+2}{(-x)^2+1} = f(x)$

Δηλαδή η f είναι άρτια.

Οπότε $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$ και $f(-\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3})$

Η f είναι συνεχής στα [-1,0] , [0,1] και γνησίως αύξουσα στο [-1,0] , γνησίως φθίνουσα στο [0,1] , με

$f(-1) = f(1) = \ln\frac{3}{2}, f(0) = \ln 2$

Είναι

$$-1 < -\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2\ln\frac{3}{2} < 2f(-\frac{1}{2}) < 2\ln 2$$

$$-1 < -\frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{2} < f(-\frac{1}{2}) < \ln 2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων, έχουμε $\ln\dfrac{3}{2} < \dfrac{2f(-\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{3})}{3} < \ln 2$

και επειδή $f((-1,0)) = (\ln\frac{3}{2}, \ln 2)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\alpha \in (-1,0)$, τέτοιος ώστε

$f(\alpha) = \dfrac{2f(-\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{3})}{3} = \dfrac{2f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})}{3}$ και είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,0)

- Είναι

$$-1<\frac{1}{2}<0 \Leftrightarrow 2\ln\frac{3}{2}<2f(\frac{1}{2})<2\ln 2$$

$$-1<\frac{1}{3}<0 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{2}<f(\frac{1}{3})<\ln 2$$

άρα προσθέτοντας κατά μέλη $\ln\frac{3}{2}<\frac{2f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})}{3}<\ln 2$.

Εφόσον $f((0,1))=(\ln\frac{3}{2},\ln 2)$, υπάρχει ένας τουλάχιστον , $\beta\in(0,1)$ τέτοιος ώστε

$f(\beta)=\frac{2f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})}{3}=\frac{2f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})}{3}$ και είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1).

Τελικά υπάρχει μοναδικός $\alpha\in(-1,0)$ και μοναδικός $\beta\in(0,1)$ ώστε

$f(\alpha)=f(\beta)=\frac{2f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})}{3}$ και είναι αντίθετοι αφού είναι ετερόσημοι με $f(\alpha)=f(\beta)$ και η f είναι άρτια.

δ) Το δεδομένο ισοδύναμα γράφεται

$$(g^2(x)+2)e^{-(x+e^x)}-g^2(x)=1 \Leftrightarrow (g^2(x)+2)e^{-(x+e^x)}=1+g^2(x) \Leftrightarrow \frac{(g^2(x)+2)}{1+g^2(x)}=e^{(x+e^x)} \Leftrightarrow$$

$$f(g(x))=x+e^x,(1),x\in\mathbb{R}$$

Θέτω $\varphi(x)=x+e^x, x\in\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=1+e^x>0$.Άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τότε

$(1)\Leftrightarrow f(g(x))=\varphi(x),(2),x\in\mathbb{R}$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2 \Rightarrow \varphi(x_1)<\varphi(x_2) \Rightarrow f(g(x_1))<f(g(x_2)) \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2) \Leftrightarrow g\downarrow$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $\alpha^x - 1 \geq x \Leftrightarrow \alpha^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$. Είναι $f(0) = 0$, άρα $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$, εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$. Η f είναι παρ/μη στο ως άθροισμα παρ/μων με $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$. Επομένως από Θ. Fermat
$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$

Δ2. α) $f(x) = e^x - x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

Πίνακας προσήμου και μονοτονίας – ακρότατων f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f	↘		↗

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 0$

- Έχουμε $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x - 1 = +\infty$.
  Εφόσον f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ ελάχιστο της f και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, το σύνολο τιμών της είναι $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

β) Η εξίσωση $e^x = x + 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x = 0$

- Παρατηρούμε ότι $e^x = x + 1 \Leftrightarrow g(x) = h(x), x \in \mathbb{R}$ όπου $g(x) = e^x$ και $h(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$
  Οπότε η λύση της εξίσωσης είναι η τετμημένη του (μοναδικού) κοινού σημείου των C_g και C_h

Δ3. Η περίμετρος κάθε ημικυκλίου είναι $\dfrac{2\pi r}{2} = \pi r$, οπότε η περίμετρος του στίβου είναι
$\Pi = 2\pi r + 2\beta$ και επομένως θα ισχύει
$4\pi f(1) = 2\pi r + 2\beta \Leftrightarrow 4\pi f(1) = 2\pi r + \pi f(x) \Leftrightarrow r = 2f(1) - f(x), x > 0$
Πρέπει $r > 0 \Leftrightarrow f(x) < 2f(1)$. Είναι $0 < 1 \Rightarrow 0 < f(1) \Leftrightarrow 2f(1) > 0 \Rightarrow 2f(1) \in f((0, +\infty))$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ υπάρχει $x_0 > 0$ με $f(x_0) = 2f(1)$. Άρα $f(x_0) = 2f(1) > f(x)$.
Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 2r\beta$, άρα
$E(x) = 2[2f(1) - f(x)]\pi f(x) = 2\pi[2f(1)f(x) - f^2(x)], x \in (0, x_0) = \Delta$.
Η Ε είναι παρ/μη ως άθροισμα παρ/μων, με $E'(x) = 4\pi f'(x)[f(1) - f(x)]$
Οπότε $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(1) \geq f(x) \Leftrightarrow x \leq 1$
Πρέπει $1 < x_0 \Leftrightarrow f(1) < f(x_0) \Leftrightarrow f(1) < 2f(1) \Leftrightarrow f(1) > 0$, που ισχύει.
Πίνακας προσήμου και μονοτονίας – ακρότατων Ε

x	0		1		x_0
E'		$+$		$-$	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

Επομένως η Ε παρουσιάζει μέγιστο στο x = 1, το $E(1) = 2\pi(e-2)^2$.

Οπότε το ορθογώνιο μέρος του στίβου γίνεται μέγιστο όταν οι διαστάσεις του είναι $\beta = \pi(e-2)$ (οριζόντια) και $2r = 2(e-2)$ (κατακόρυφη).

Δ4.

- Εφόσον το $M(x, y)$ κινείται, είναι $M(x(t), y(t)), t \geq 0$

$$y(t) = e^{x(t)} - x(t) - 1 \Rightarrow y'(t) = x'(t)(e^{x(t)} - 1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x'(t) = x'(t)(e^{x(t)} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x(t)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(t) = -\ln 2 \Leftrightarrow y(t) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

- Ισχύει $y'(t) = 2 \Rightarrow x'(t) = -4, t \geq 0$

- Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{-\ln 2}$

$$(\varepsilon\varphi\omega(t))' = \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \left(\frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{-\ln 2}\right)^2\right)\omega'(t) = \frac{2\ln 2 - 2}{\ln^2 2} \Leftrightarrow \left(\frac{\ln^2 2 + (\ln 2 - \frac{1}{2})^2}{\ln^2 2}\right)\omega'(t) = \frac{2\ln 2 - 2}{\ln^2 2} \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t) = \frac{8(\ln 2 - 1)}{8\ln^2 2 - 4\ln 2 + 1} \text{rad/sec}$$