ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ με $D_f=\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα και γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x-1,\ln(x^2-2x+2)$ (σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x^2-2x+2,\ln x$) και $\alpha x+\beta$ με

$$f'(x)=[(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta]'=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

Η (ε) εφάπτεται της C_f στο $A(1,1)$ άρα ισχύουν

- $f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$
- $f'(1)=-1\Leftrightarrow \alpha=-1$

Άρα α = - 1 και β = 2.

Δ2. Η f και η $y=-x+2$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$E=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|dx$$

Πρόσημο της $\varphi(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)$ στο $[1,2]$

- $1\le x\le 2\Rightarrow x-1\ge 0$
- $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge 1\Rightarrow \ln[(x-1)^2+1]\ge 0$

Άρα $\varphi(x)\ge 0$ στο $[1,2]$.

Οπότε $E=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$

Θέτω $u=x^2-2x+2\Leftrightarrow du=2(x-1)dx$

Για $x=1\Rightarrow u=1$

Για $x=2\Rightarrow u=2$

Άρα $E=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln u du=\frac{1}{2}[u\ln u]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du=\ln 2-\frac{1}{2}$.

Δ3.

i. $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα , πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$f''(x)=[\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1]'=\frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 ή x^2-2x+4=0$ η οποία έχει μοναδική ρίζα το 1 αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=-12<0$. Όποτε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f'(1)=-1$ και ισχύει $f'(x)\geq -1$.

ii. $f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-2+\frac{3}{2}\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}$

Θεωρώ διάστημα $[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}]$

- f συνεχής στο $[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}]$
- f παραγωγίσιμη στο $(\lambda,\lambda+\frac{1}{2})$

Άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\lambda,\lambda+\frac{1}{2})$ με $f'(\xi)=\frac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}=2(f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda))$

Όμως ισχύει $f'(\xi)\geq -1\Leftrightarrow 2(f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda))\geq -1\Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}$.

Δ4. Η g παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $g'(x)=-3x^2-1$. Έστω $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ σημεία επαφής των C_f,C_g με τις εφαπτόμενες με εξισώσεις :

$(\varepsilon_1): y=f'(x_1)x+f(x_1)-f'(x_1)x_1$

$(\varepsilon_2): y=g'(x_2)x+g(x_2)-g'(x_2)x_2$

Για να έχουν οι C_f,C_g κοινή εφαπτόμενη πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$ (1) και $f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2$ (2)

Παρατηρώ ότι $f'(1)=-1,\ g'(0)=-1$, οπότε (1) επαληθεύεται με $x_1=1$ και $x_2=0$. Τότε η (2) γράφεται $f(1)-f'(1)=g'(0)-0 \Leftrightarrow 1+1=2$, που ισχύει.

Οπότε οι C_f, C_g έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτόμενη.

- Για την $g'(x)=-3x^2-1$ έχουμε $g''(x)=-6x$ και ισχύουν g' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα η g' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 με $g'(0)=-1$ και ισχύει $g'(x)\le g'(0)$.

Άρα οι C_f, C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτόμενη στα σημεία $A(1,1), B(0,2)$ η οποία είναι η $y=-x+2$.

Επιμέλεια απαντήσεων: Νατάσα Παπαγούλα , Ηλίας Κουντούπης