ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. καινούργιο σχολ. σελ 135 / παλιό σχολ. 253

Α2. Ψευδής, σελ.99 / παλιό σχολ. σελ. 217

αντιπαράδειγμά, $f(x) = |x|$

Α3. σελ 73, παλιό σχολ. σελ. 191

Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$x \in A_g \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και

$$g(x) \in A_f \Rightarrow \frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \cdot (1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Β2.

$(fog)(x) = h(x) = \ln x - \ln(1-x)$, για $x > 0$ και $1 - x > 0$, αφού $(0,1)$

$$h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1}{x(1-x)}>0$$

Άρα η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε η $h(x)$ είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=+\infty$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, άρα

$$h(\mathrm{A})=\left(\lim_{x\to 0^+} h(x),\lim_{x\to 1^-} h(x)\right)=\mathbb{R}$$

Οπότε $\mathrm{A}_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

$$y=f(x)\Rightarrow y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\Rightarrow e^y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow e^y\cdot(1-x)=x\Rightarrow e^y-xe^y=x\Rightarrow e^y=x+xe^y\Rightarrow$$

$$e^y=x\cdot(1+e^y)\Rightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}$$

Άρα $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ με $\mathrm{A}_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

Β3.

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\varphi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{(e^x)'\cdot(e^x+1)-e^x\cdot(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\cdot(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

$$\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\cdot\left(e^x+1\right)^2-e^x\cdot\left[\left(e^x+1\right)^2\right]'}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^x\cdot\left(e^x+1\right)^2-e^x\cdot 2\cdot\left(e^x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=$$

$$\frac{e^x\cdot\left(e^x+1\right)-2e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^{2x}+e^x-2e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{\left(e^x+1\right)^3}\quad \text{με } e^x>0 \quad \text{και } \left(e^x+1\right)^3>0$$

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow -e^x+1=0 \Leftrightarrow x=0$$

$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	-
$\varphi(x)$	∪	∩

Άρα η φ είναι κυρτή $(-\infty,0]$, η φ είναι κοίλη $[0,+\infty)$

Και σημείο καμπής $\varphi(0)=\frac{1}{2}$

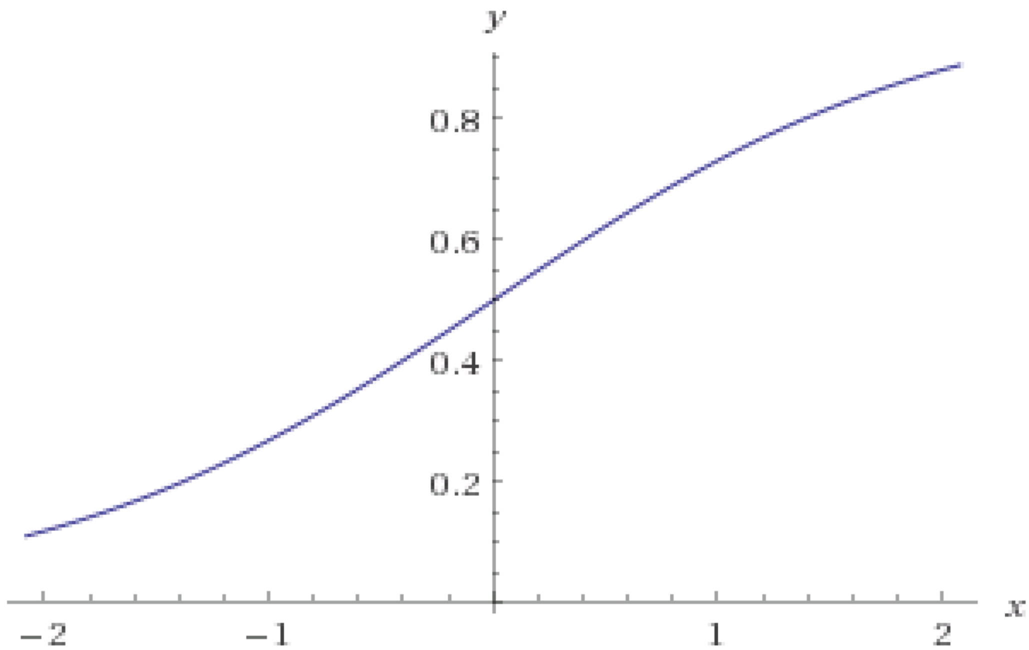
B4

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$ άρα η C_φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ε: y=1

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$ άρα η C_φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ε: y=0

Άρα η $\varphi(x)$ έχει στο $-\infty$ ορίζονται ασύπμτωτη την y=0 και στο $+\infty$ την y = 1

$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	-
$\varphi'(x)$	+	+
$\varphi(x)$		



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Γ : Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0,f(x_0))$, όπου $x_0\in[0,\pi]$, είναι

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y-(-\eta\mu x_0)=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot x+x_0\cdot\sigma\upsilon\nu x_0$ και

διέρχεται από το $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ όταν $-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0+x_0\sigma\upsilon\nu x_0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x_0+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0-x_0\sigma\upsilon\nu x_0-\frac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow \eta\mu x_0+\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\sigma\upsilon\nu x_0-\frac{\pi}{2}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2}=0$, με $x\in[0,\pi]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $[0,\pi]$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-\eta\mu x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\eta\mu x$

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\eta\mu x=0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}=0$ ή $\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=0$ ή $x=\pi$ αφού $x\in[0,\pi]$

Το πρόσημο της g' , η μονοτονία και τα ακρότατα της g στο $[0,\pi]$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ΜέγιστοΕλάχιστο Μέγιστο

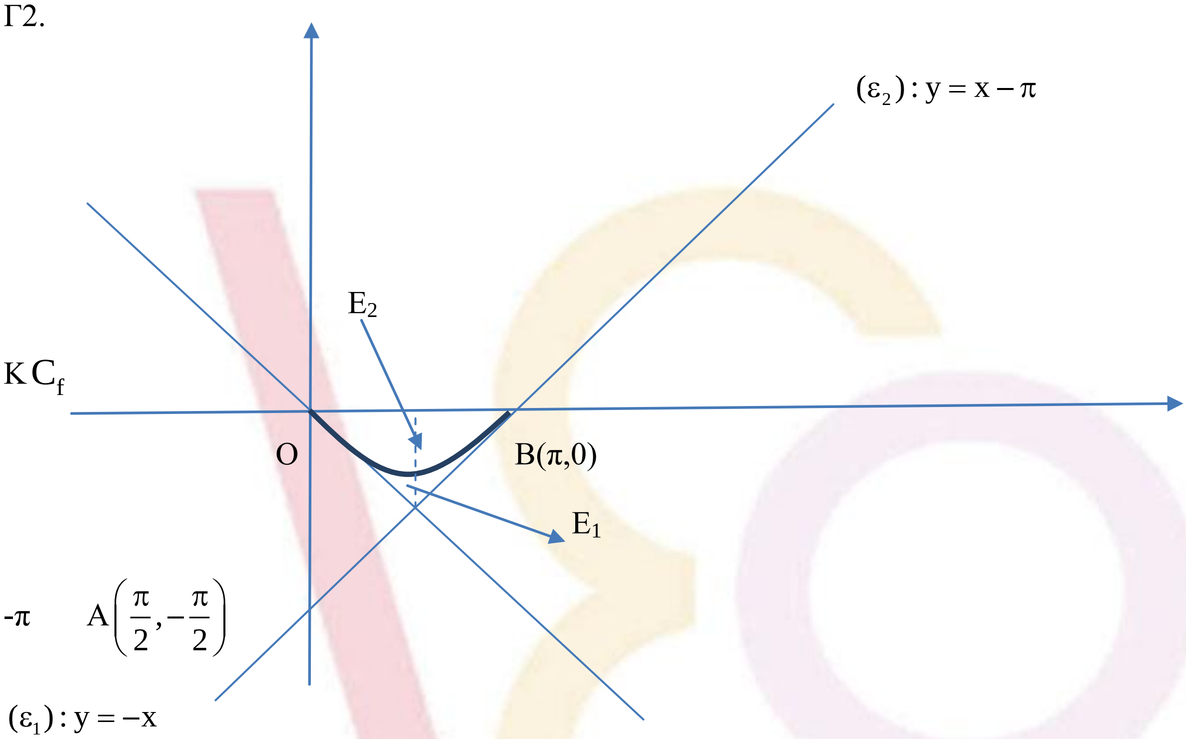
Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

Η g παρουσιάζει στη θέση $x_1=0$ μέγιστο το $g(0)=\eta\mu 0+\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\cdot\sigma\upsilon\nu 0-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$,

στη θέση $x_2=\frac{\pi}{2}$ ελάχιστο το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$ και στη θέση $x_3=\pi$ μέγιστο το $g(\pi)=\eta\mu\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)\sigma\upsilon\nu\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot(-1)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1=0$, $x_3=\pi$ άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής τα $O(0,0)$ και $B(\pi,0)$, επομένως υπάρχουν και δύο εφαπτομένες της C_f που άγονται από το $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ και είναι οι : $(\varepsilon_1): y+\eta\mu 0=-\sigma\upsilon\nu 0\cdot x+0\cdot\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow y=-x$ στο $O(0,0)$

και $(\varepsilon_2): y+\eta\mu\pi=-\sigma\upsilon\nu\pi\cdot x+\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow y=x-\pi$ στο $B(\pi,0)$

Γ2.



Το E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ μείον το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x δηλαδή το E_2 . Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο επειδή οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται κάθετα αφού $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=1\cdot(-1)=-1$. Είναι

$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OB)\cdot(AK)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left|-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi^2}{4}$, όπου ΑΚ το ύψος από την κορυφή της ορθής γωνίας Α

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ οπότε

$$E_2=\int_0^{\pi}-f(x)dx=\int_0^{\pi}-(-\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi-(\sigma\upsilon\nu 0)=-(-1)+1=2$$

και $E_1=(OAB)-E_2=\frac{\pi^2}{4}-2$. Οπότε $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}-\frac{2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-(x-\pi)}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[\dfrac{1}{f(x)-(x-\pi)}\cdot(f(x)+x)\right]=(+\infty)\cdot\pi=+\infty$, διότι

$\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=-\eta\mu\pi+\pi=\pi$ και

$\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)-(x-\pi))=\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x-(x-\pi))=-\eta\mu\pi-(\pi-\pi)=0$ ενώ παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση στο Γ2 ότι καθώς το $x\to\pi^-$, αφού $x<\pi$ από το πεδίο ορισμού της f , η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $(\varepsilon_2): y=x-\pi$, που σημαίνει ότι $f(x)>x-\pi$ κοντά στο π .

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-(x-\pi)}=+\infty$

Γ4. Από τη γραφική παράσταση της f και της ε_2 στο Γ2 ερώτημα είναι $f(x)>x-\pi$ για κάθε $x\in[1,e]$ οπότε έχουμε : $f(x)>x-\pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{x-\pi}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{x}{x}-\dfrac{\pi}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}>1-\dfrac{\pi}{x}$ επομένως είναι και

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e 1dx-\int_1^e\pi\cdot\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>1\cdot(e-1)-\pi\cdot[\ln x]_1^e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi\cdot(\ln e-\ln 1)\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi\cdot$$

Δ1. Η $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση των συνεχών x^4, $\sqrt[3]{x}$ $(x\geq 0)$.

Η $f(x)=e^x ημx$ είναι συνεχής στο $(0,π]$ ως γινόμενο των συνεχών e^x, $ημx$.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x ημx\right)=0=f(0)$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[-1,π]$.

Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της f στο $(-1,π)$.

- Για $x\in(-1,0)$ έχουμε $f(x)=\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{(-x)^4}=(-x)^{\frac{4}{3}}$ $(-x>0)$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $u=-x>0$ και $u^{\frac{4}{3}}$ (παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$), με

  $f'(x)=\left[(-x)^{\frac{4}{3}}\right]'=-\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$.

  Είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,0)$, άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(-1,0)$.

- Για $x\in(0,π)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων, με

  $f'(x)=\left(e^x ημx\right)'=e^x(ημx+συνx)$.

  Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow ημx=-συνx$ $(e^x>0)$.

  Άρα $x=\dfrac{3π}{4}$ αφού $x\in(0,π)$.

  Οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο το $x=\dfrac{3π}{4}$.

- Εξετάζουμε παραγωγισιμότητα της f στο $x=0$. Είναι

  ✓ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[-(-x)^{\frac{1}{3}}\right]=0$

  ✓ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x ημx-0}{x-0}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}e^x(ημx+συνx)=1$

Εφόσον τα πλευρικά όρια παραγωγισιμότητας στο $x=0$ είναι άνισα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, οπότε είναι κρίσιμο σημείο της. Τελικά κρίσιμα σημεία της f είναι $x=\frac{3\pi}{4}$ (μηδενίζεται η $f'(x)$) και $x=0$ (η f δεν παραγωγίζεται).

Δ2. Από το ερώτημα Δ1 έχουμε ότι:

- f συνεχής $[-1,\pi]$ και
- $f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, x\in(-1,0)\\ e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x), x\in(0,\pi)\end{cases}$
- κρίσιμα σημεία της f οι $x=0$, $x=\frac{3\pi}{4}$
- $f'(x)<0$ στο $(-1,0)$
- Πρόσημο της $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ στο $(0,\pi)$

  f' συνεχής στο $(0,\pi)$, με μοναδική ρίζα $x=\frac{3\pi}{4}$, άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

  Είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$, άρα $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1-\sqrt{3}}{2}<0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
	T.M.		T.E.		T.M.		T.E.

✓ Είναι $f'(x)<0$ στα $(-1,0)$, $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ άρα f γνησίως φθίνουσα στα $[-1,0]$, $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$.

✓ Η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$ άρα παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο σ' αυτό, και παραγωγίσιμη στα $(-1,0)$, $(0,\pi)$ οπότε από τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$ έχουμε ότι: η f παρουσιάζει

- τοπικό μέγιστο στο $x=-1$, το $f(-1)=1$ και στο $x=\frac{3\pi}{4}$, το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}>1$ οπότε $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ολικό μέγιστο της f.
- Τοπικό ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$ και στο $x=\pi$, το $f(\pi)=0$ οπότε $f(0)=f(\pi)=0$ ολικό ελάχιστο της f.

✓ Η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$ με ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ και ολικό ελάχιστο $f(0)=f(\pi)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left[0,\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}\right]$.

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδό E ορίζεται από τη C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$ (άξονας $y'y$) και $x=\pi$.

Στο $[0,\pi]$ η $f(x)=e^x ημx$ είναι συνεχής (ερώτημα Δ1) και η $g(x)=e^{5x}$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $5x$, e^x. Οπότε,

$$E=\int_0^\pi |f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^\pi |e^x ημx-e^{5x}|\,dx$$

θέτω $h(x)=f(x)-g(x)=e^x ημx-e^{5x}=e^x(ημx-e^{4x})$, $x\in[0,\pi]$

Έχουμε: $0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le 4x\le 4\pi \Leftrightarrow 1\le e^{4x}\le e^{4\pi} \Leftrightarrow -e^{4\pi}\le -e^{4x}\le -1$ (1)

και $0\le x\le \pi \Leftrightarrow 0\le ημx\le 1$ (2).

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει: $-e^{4\pi}\le ημx-e^{4x}\le 0$.

Άρα $h(x)\le 0$ στο $[0,\pi]$, εφόσον $e^x>0$.

Επομένως, $E=\int_0^\pi (e^{5x}-e^x ημx)dx=\int_0^\pi e^{5x}dx-\int_0^\pi e^x ημx dx$ (3)

Είναι $\int_0^\pi e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$ (4) και

$$I=\int_0^\pi e^x ημx dx=[e^x ημx]_0^\pi-\int_0^\pi e^x(ημx)'dx=0-\int_0^\pi e^x συνx dx=-[e^x συνx]_0^\pi+\int_0^\pi e^x(-ημx)dx$$

$$\Rightarrow I=-e^\pi συνπ+e^0συν0-I \Leftrightarrow 2I=e^\pi+1 \Leftrightarrow I=\frac{e^\pi+1}{2} \quad (5)$$

τότε στην (3) από (4) και (5) έχουμε $E=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}=\frac{2e^{5\pi}-e^{\pi}-7}{10}$

Δ4. Η εξίσωση ορίζεται στο $[-1,\pi]$

$$e^{-\frac{3\pi}{4}}\left[16f(x)-(4x-3\pi)^2\right]=8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \quad (1)$$

Είναι $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα $(1)\Leftrightarrow 16f(x)-(4x-4\pi)^2=16f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 16\left[f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=16\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad (2)$$

Από το Δ2 έχουμε ότι το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι το ολικό μέγιστο της f στο $[-1,\pi]$ άρα

ισχύει $f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\le 0$ για κάθε $x\in[-1,\pi]$.

Επίσης $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\ge 0$ για κάθε $x\in[-1,\pi]$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει νόημα μόνο αν κάθε μέλος ισούται με μηδέν.

Δηλαδή $(2)\Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$.

Επιμέλεια απαντήσεων:

Τσαλιγόπουλος Μίλτος, Μήτρου Βασίλης, Πανούσης Γιώργος, Βαλιάδη Μαρία

Βασίλης Μαστρογεωργίου - Θωμάς Καραγιάννης

Νατάσα Παπαγούλα, Ηλίας Κουντούπης

Νέο Φροντιστήριο
www.neo.edu.gr