ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο

Α4. 1) Λ

2) Λ

3) Λ

4) Σ

5) Λ

Θέμα 2ο

Β1.

i. $D_f = A = (-\infty, 0) \cup (0,3) \cup (3,4]$
$f(A) = (-\infty, 3) \cup \{4\}$

ii. α. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

β. Το όριο της f στο $x_0 = 0$ δεν υπάρχει, γιατί $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 3 \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

γ. Το όριο της f στο $x_0 = 2$ δεν υπάρχει, γιατί $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$

δ. $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 3$

ε. $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = 2$

στ. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ «κοντά» στο $-\infty$)

ζ. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

η. Το όριο της $\frac{1}{f(x)}$ στο $x_0 = 1$ δεν υπάρχει, γιατί $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$ και $f(x) < 0\ για\ \ x < 1$, "κοντά" στο 1) και $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$ και $f(x) > 0\ για\ \ x > 1$, "κοντά" στο 1) δηλαδή, $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{f(x)}$.

iii. Σημείο ασυνέχειας της f είναι το $x_0 = 2$, γιατί ενώ $2 \in D_f$ έχουμε $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$, δηλαδή δεν υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = 2$.

iv.

- Η ευθεία $y = 0$ (άξονας x’x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, γιατί $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- Η ευθεία $x = 0$ (άξονας y’y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , αφού $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

v. Η f παρουσιάζει

- τοπικό μέγιστο στο $x = -5$, το $f(-5) = \frac{5}{2}$
- τοπικό ελάχιστο στο $x = -1$, το $f(-1) = 0$
- ολικό μέγιστο στο $x = 2$, το $f(2) = 4$
- τοπικό ελάχιστο στο $x = 4$, το $f(4) = 2$

B2.

i. Πίνακας προσήμων $f'(x)$ και μονοτονίας f

x	-3		-2		0		3
$f'(x)$		+	0	+	0	$-$	
$f(x)$		↗		↗		↘	
	T.E.				O.M.		T.E

Η είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $[-3,3]$.
Για $x \in (-3,-2) \cup (-2,0)$, $f'(x) > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[-3,0]$.
Για $x \in (0,3)$, $f'(x) < 0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα $x = -3, x = 3$ και μέγιστο στο $x = 0$.

Πίνακας μονοτονίας $f'(x)$ και κυρτότητας f

x	-3		-2		-1		1		3
$f'(x)$		↘	0	↗	0	↘		↗	
$f(x)$		⌢		⌣		⌢		⌣	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $[-3,3]$.
Για $x \in (-3,-2), x \in (-1,1)$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η f είναι κοίλη στα $[-3,-2], [-1,1]$.
Για $x \in (-2,-1), x \in (1,3)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η f είναι κυρτή στα $[-2,-1], [1,3]$.

Στα $x=-2, x=-1, x=1$ η C_f έχει εφαπτομένη και εκατέρωθεν καθενός η f αλλάζει κυρτότητα άρα για $x=-2, x=-1, x=1$ η f έχει σημεία καμπής.

ii. $L_1=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)=0.$

$L_2=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]=-\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-1.$

Θέμα 3ο

$3f(x)+f^3(x)=x$ ①

i. $f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$ $\overset{\oplus}{\Rightarrow}$

$3f(x_1)+f^3(x_1)=3f(x_2)+f^3(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$ άρα $f:1-1$ άρα αντιστρέφεται.

Θέτοντας $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ έχουμε $3y+y^3=f^{-1}(y)\Longrightarrow f^{-1}(x)=3x+x^3$, x πραγματικός.

ii. ① $\overset{x=x_0}{\Longrightarrow} 3f(x_0)+f^3(x_0)=x_0$ ②

①−② $\Longrightarrow 3f(x)-3f(x_0)+f^3(x)-f^3(x_0)=x-x_0\Leftrightarrow$

$3(f(x)-f(x_0))+\big(f(x)-f(x_0)\big)\big(f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)\big)=x-x_0\Leftrightarrow$

$\big(f(x)-f(x_0)\big)\big(f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3\big)=x-x_0$

Η παράσταση $f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3$ είναι τριώνυμο με άγνωστο το $f(x)$

$\Delta=f^2(x_0)-4(f^2(x_0)+3)=-3f^2(x_0)-12<0$

Άρα $f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3>0$ και μάλιστα $f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3>3$

Οπότε, $f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3}\overset{③}{\Rightarrow}$

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3}\right|\le|x-x_0|\Longrightarrow$$

$|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|\Longrightarrow -|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le|x-x_0|$

$\lim\limits_{x\to x_0}-|x-x_0|=\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$ συνεπώς από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0\Longrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, άρα f συνεχής στο x_0 και επειδή x_0 τυχαίο, f συνεχής στο R.

iii. ③ $\Longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3}\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)+3}=\frac{1}{3f^2(x_0)+3}\in R$$

Άρα f παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)=\frac{1}{3f^2(x_0)+3}>0$ και επομένως $f\uparrow$.

iv. $E=\int_0^4|f(x)|\,dx$

Θέτω $x=f^{-1}(y)\Longrightarrow (x)'dx=(f^{-1}(y))'dy\Longrightarrow dx=(f^{-1}(y))'dy$

Όταν $x=0\Longrightarrow f^{-1}(y)=0\Longrightarrow y^3+3y=0\Longrightarrow y=0$

Όταν $x=4\Longrightarrow f^{-1}(y)=4\Longrightarrow y^3+3y=4\Longrightarrow y=1$

Οπότε $E=\int_0^1|f(f^{-1}(y))|\,(f^{-1}(y))'dy=\int_0^1|y|\,(3y^2+3)dy=\int_0^1 y\,(3y^2+3)dy=$

$$=\int_0^1 3y^3+3y\,dy=\left[\frac{3y^4}{4}+\frac{3y^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\tau.\mu.$$

v. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{f(x)+x}$

Θέτω $f(x)=y\Longrightarrow x=f^{-1}(y)$, $\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, γιατί f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε

$f(R)=(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))$ και $f(R)=$ πεδίο ορισμού της $f^{-1}=(-\infty,+\infty)$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{f(x)+x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f\left(f^{-1}(y)\right)-f^{-1}(y)}{f(f^{-1}(y))+f^{-1}(y)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y-(y^3+3y)}{y+y^3+3y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-y^3}{y^3}=-1.$

<u>Θέμα 4ο</u>

i. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ στο $(0,+\infty)$

Άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1>0$, έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

$f'(x)=\left(2x+\frac{1}{x}\right)f(x)\overset{f(x)>0}{\Longleftrightarrow}\frac{f'(x)}{f(x)}=2x+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'=(x^2+lnx)'$

Άρα, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ $\ln f(x)=x^2+\ln x+c\overset{x=1}{\Longrightarrow}\ln f(1)=1+\ln 1+c\Leftrightarrow c=-1$,

οπότε, $\ln f(x)=x^2+\ln x-1\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2-1+\ln x}\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2-1}\cdot e^{\ln x}\Leftrightarrow$

$f(x)=xe^{x^2-1}, x>0$.

Η f είναι συνεχής στο $x=0$, επομένως,

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}xe^{x^2-1}=0e^{-1}=0=f(0)$

Άρα, ο τύπος της f είναι $f(x)=xe^{x^2-1},\ x\geq 0$.

ii. $f'(x)=\left(2x+\frac{1}{x}\right)f(x)>0$ για κάθε $x>0$, αφού $2x+\frac{1}{x}>0$ και $f(x)>0$ από το (i) και f συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

iii. Έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow xe^{x^2-1}=0\Leftrightarrow x=0$, αφού $e^{x^2-1}>0$ και η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Άρα $E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-1)'e^{x^2-1}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2-1}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2-1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{e-1}{2e}$ τετραγωνικές μονάδες.

iv. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2-1}}{\ln x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(xe^{x^2-1}\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2-1}+2x^2e^{x^2-1}}{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{x^2-1}+2x^2e^{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3+x)e^{x^2-1}$

$=(+\infty)(+\infty)=+\infty$

v. Η f ↑ στο $[0,+\infty)$ άρα

$0\le x\le 1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)\le f(1)\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 f(1)dx=f(1)$ $\quad$ $(\mathrm{f(x)}=\mathrm{f(1)}\ \mu\acute{o}\nu o\ \gamma\iota\alpha\ x=1)$

$1\le x\le 2\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)\le f(2)\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2 f(2)dx=f(2)$ $\quad$ $(\mathrm{f(x)}=\mathrm{f(2)}\ \mu\acute{o}\nu o\ \gamma\iota\alpha\ x=2)$

. . .

. . .

. . .

$2016\le x\le 2017\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)\le f(2017)\Rightarrow\int_{2016}^{2017} f(x)dx<\int_{2016}^{2017} f(2017)dx=f(2017)$

$(\mathrm{f(x)}=\mathrm{f(2017)}\ \mu\acute{o}\nu o\ \gamma\iota\alpha\ x=2017)$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\cdots+\int_{2016}^{2017} f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)$$

Άρα,

$$\int_0^{2017} f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)$$

vi. Η F είναι παράγουσα της f στο $[0,+\infty)$ οπότε ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.
Το ζητούμενο γράφεται $\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}<\frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-x-1}$

Η F είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, στα $[x,x+1],[x+1,x+2],x\ge 0$.
Η F είναι παραγωγίσιμη, στα $(x,x+1),(x+1,x+2)$.
Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $\xi_1\in(x,x+1),\xi_2\in(x+1,x+2)$ τέτοια ώστε
$F'(\xi_1)=\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x}$, $F'(\xi_2)=\frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)}$
Έχουμε $x<\xi_1<x+1<\xi_2<x+2$ και $F'(x)=f(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (ερώτημα ii) οπότε:

$$\xi_1<\xi_2\Longrightarrow F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\Longrightarrow\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x}<\frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F(x+1)-F(x)<F(x+2)-F(x+1)\Longrightarrow 2F(x+1)<F(x+2)+F(x).$$