νέο φροντιστήριο	**ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ**	Διαγώνισμα Προσομοίωσης Μαθηματικών Προσανατολισμού 19/04/2017
	ΟΝΟΜΑ	
	ΤΜΗΜΑ	Γ Λυκείου
	ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΟ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Bolzano

Μονάδες 5

Α3. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Μονάδες 3

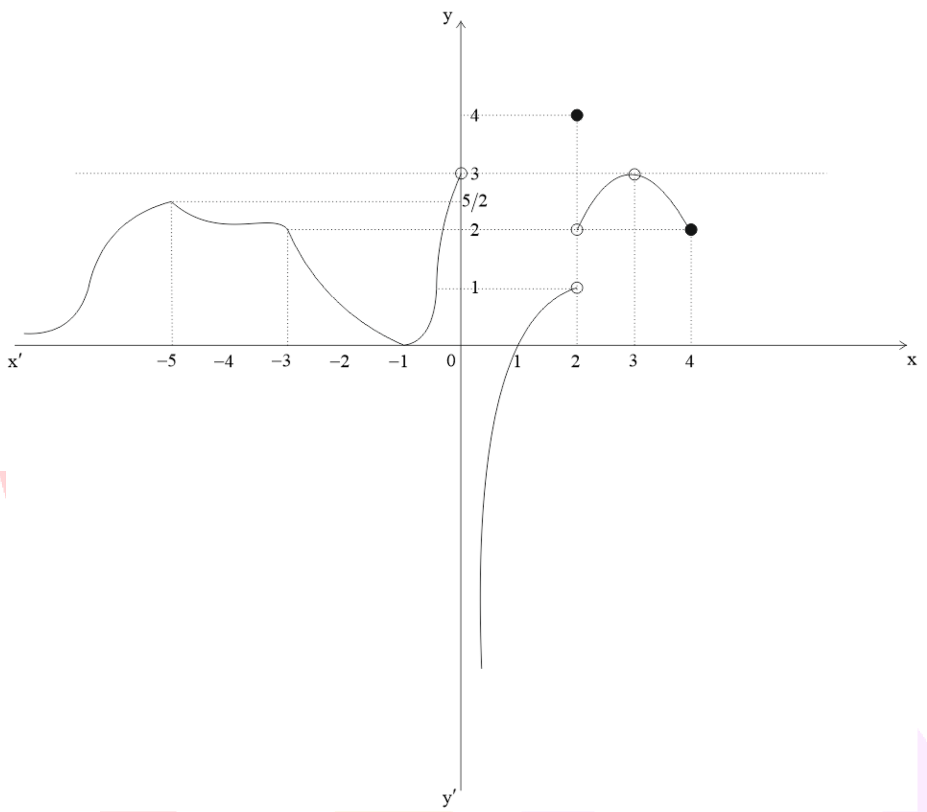
Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) :

1) Αν f,g συνεχείς στο [α,β], με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.
2) Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο [α,β] και f(α)f(β) > 0 τότε η εξίσωση f(x) = 0 δεν έχει καμία ρίζα στο (α, β).
3) Αν $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ ή $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\lambda$.
4) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι «1-1» στο Δ .
5) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f:



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

ii. Να βρείτε, αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **3.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **5.** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **6.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{f(x)}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

iii. Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 1

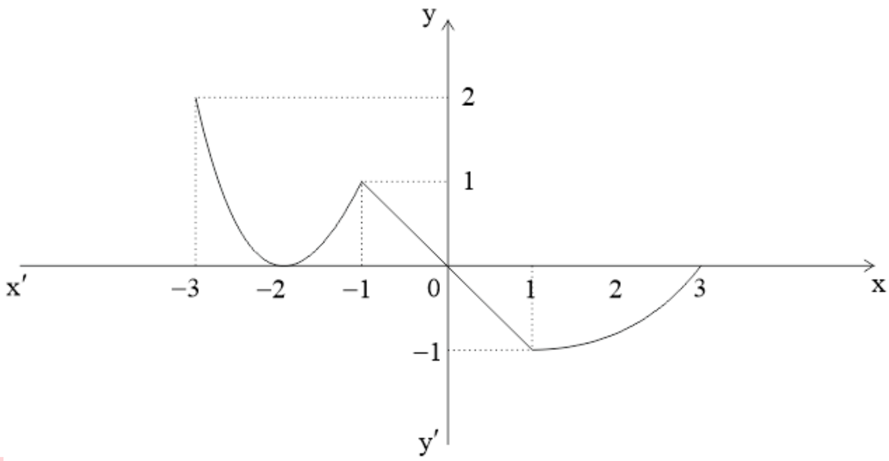
iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f, αιτιολογώντας την απάντησή σας με χρήση ορίων.

Μονάδες 2

v. Να μελετήσετε την f ως προς τα τοπικά και ολικά ακρότατα.

Μονάδες 2

B2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f'(x)$:



i. Σχηματίζοντας πίνακα προσήμων της $f'(x)$ και μονοτονίας της $f'(x)$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τις θέσεις ακροτάτων, την κυρτότητα και τις τιμές του x στις οποίες υπάρχουν σημεία καμπής.

Μονάδες 3 + 4

ii. Αν f(1) = -1 να προσδιορίσετε τα όρια:

$$L_1 = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}, \quad L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{(x-1)^3}.$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $3f(x) + f^3(x) = x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Αν είναι γνωστό ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

Μονάδες 3

ii. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

iii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στην συνέχεια να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 5

iv. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x= 4 .

Μονάδες 5

v. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{f(x)+x}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν

- $f(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$
- $f(1)=1$
- $f'(x)=(2x+\frac{1}{x})f(x)$, για κάθε $x>0$

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=xe^{x^2-1}$

Μονάδες 5

ii. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

Μονάδες 3

iii. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 4

iv. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$

Μονάδες 4

v. Να δείξετε ότι $\int_0^{2017} f(x)dx < f(1) + f(2) + \ldots.. + f(2017)$

Μονάδες 4

vi. Αν F μια παράγουσα της f στο $[0, +\infty)$ στο να δείξετε ότι $2F(x+1) < F(x+2) + F(x)$

Μονάδες 5