ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙ ΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ (1), $x\in\mathbb{R}$, έχει προφανή λύση $x=0$, αφού $e^0-0-1=0$ ισχύει.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1=0,\ x\in\mathbb{R}$.

Οπότε η $(1)\Leftrightarrow g(x)=0$ και $g(0)=1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων

e^{x^2} (σύνθεση των παραγωγίσιμων x^2, e^x), $-x^2$, -1, άρα και συνεχής.

Είναι $g'(x)=(e^{x^2}-x^2-1)'=e^{x^2}(x^2)'-2x=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1),\ x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x(e^{x^2}-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $e^{x^2}=1\Leftrightarrow x=0$.

Έστω $e^{x^2}-1\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq e^0\Leftrightarrow x^2\geq 0$, ισχύει.

Πίνακας προσήμου της $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$e^{x^2}-1$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Πίνακας προσήμου της $g'(x)$ και μονοτονίας της $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0 **Ο.Ε.**	$\nearrow$	

Είναι $g'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, $g'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και $g'(0)=0$ άρα η g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο μόνο στο $x=0$, το $g(0)=0$.

Άρα το $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της $g(x)=0$, άρα και μοναδική λύση της εξίσωσης (1).

Γ2. Έχουμε $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1 \overset{\Gamma 1}{\Leftrightarrow} x=0$.

Η συνάρτηση f στο διάστημα $(-\infty,0)\subseteq\mathbb{R}$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σ' αυτό.

Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

Οπότε

- Αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, τότε στο διάστημα αυτό είναι

  $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|e^{x^2}-x^2-1| \Leftrightarrow -f(x)=|e^{x^2}-x^2-1|$ (2)

  Από Γ1 έχουμε ότι για $x<0$, g γνησίως φθίνουσα, άρα $g(x)>0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1>0$.

  Οπότε $(2) \Leftrightarrow -f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$.

- Αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$, τότε στο διάστημα αυτό είναι

  $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|e^{x^2}-x^2-1| \Leftrightarrow f(x)=|e^{x^2}-x^2-1|$ (3)

  Έχουμε για $x<0$, $e^{x^2}-x^2-1>0$.

  Άρα $(3) \Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$.

Επειδή επιπλέον, $f(0)=0$ έχουμε

- ή $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, για κάθε $x\in(-\infty,0]$
- ή $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, για κάθε $x\in(-\infty,0]$

Αντίστοιχα έχουμε

- ή $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$
- ή $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Τελικά συνδυάζοντας τα παραπάνω η f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους:

- $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$
- $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$
- $f(x)=\begin{cases}-e^{x^2}+x^2+1, & x\le 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x>0\end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1, & x\le 0\\ -e^{x^2}+x^2+1, & x>0\end{cases}$

Γ3. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμή στο $\mathbb{R}$ (αιτιολόγηση στο Γ1, αφού $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

άρα και συνεχής, με $f'(x)=2x(e^{x^2}-1)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων, με

$f''(x)=[2x(e^{x^2}-1)]'=2(e^{x^2}-1)+2xe^{x^2}2x=2(e^{x^2}-1)+4x^2e^{x^2}$

Είναι $e^{x^2}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1 \Leftrightarrow x^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $e^{x^2}-1=0$ μόνο για $x=0$.

Επίσης $4x^2e^{x^2}\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $4x^2e^{x^2}=0$ μόνο για $x=0$.

Άρα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Δίνεται η εξίσωση $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x),\ (1)$ με $x\in[0,+\infty)$.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$, με $x\geq 0$.

Οπότε $(1)\Leftrightarrow h(|\eta\mu x|)=h(x),(2)$.

Είναι h παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής.

Έχουμε $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$.

Για $x>0$ είναι $x+3>x$ και αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (Γ3) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,+\infty)$.

Οπότε $x+3>x \Rightarrow f'(x+3)>f'(x) \Rightarrow h'(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$.

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Τότε $(2)\Leftrightarrow |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow x=0$.

Επιμέλεια απαντήσεων: Νατάσα Παπαγούλα