	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ	Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	
	ΤΜΗΜΑ	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να δείξετε ότι αν f΄(x) > 0 στο (α, x_0) και f΄(x) < 0 στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 8

Α.2. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1.

Μονάδες 3

Α.3. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 4

Α.4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα Σ (Σωστές) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις.

i. Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

ii. Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 <. \dots < x_\nu = \beta$ χωρίζουν το διάστημα $[a, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ και $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ για κάθε $\kappa = \{1,2, \dots, \nu\}$ τότε ορίζουμε ως $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi_1)\,\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\Delta x$.

iii. Αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ τότε η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$.

iv. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+4}}=+\infty$.

v. Ισχύει ότι $(ln|x|)'=\frac{1}{x}$ αν x > 0 και $(ln|x|)'=-\frac{1}{x}$ αν x < 0

Μονάδες 10

Θέμα Β

Β.1. Δίνονται οι μιγαδικοί z ,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z+16|=4|z+1|$ και $|w+2-4i|=|w+4-6i|$.

i. Να βρεις τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z καθώς και την εξίσωση του.

Μονάδες 4

ii. Να βρεις τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w καθώς και την εξίσωσή του.

Μονάδες 6

iii. Να βρεις την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.

Μονάδες 5

Β.2. Αν $z,w\in\mathbb{C}$ τότε να αποδείξετε ότι:

i. $|1-\bar{z}w|^2-|z-w|^2=(1-|z|^2)(1-|w|^2)$.

Μονάδες 6

ii. Αν $|z_0|\neq 1$ τότε $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=1\Leftrightarrow|z|=1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(x) = 2x(f(x) + x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) - 1 = 0$

Γ.1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ.2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ.3. Να αποδείξετε ότι $e^{x^2-1} - 2x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ.4. Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση $e^{x^4} = \frac{e^{x^2}}{x}$

Μονάδες 6

Γ.5. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \int_{2-x}^{x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:ℝ→ℝ για την οποία ισχύει $xf(x) + x\int_0^1 f(xt)dt = \int_0^x \left[2e^{u-x} - (x-u)f(x-u)\right]du$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι ισχύει $xf'(x) + 2f(x) = 2e^{-x} - xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\neq 0 \\ 1\;, x=0 \end{cases}$

Μονάδες 5

Δ3. Αν $g(x)=f(x)\eta\mu x$, να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $\ln\dfrac{2}{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}<\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, για $\alpha<\beta$

Μονάδες 6

Δ5. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{1/e}^{1/2}\sqrt{-\ln x}\,dx+\int_{1}^{\sqrt{\ln 2}} f(x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}-\frac{1}{e}$

Μονάδες 4