<u>Θέμα Α :</u>

Α1. Σελίδα 31 σχολικό βιβλίο

Α2. Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Α3. Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\overline{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\dots+w_\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}.$$

Α4.

i) Λ
ii) Σ
iii) Λ
iv) Λ
v) Σ

<u>Θέμα Β:</u>

Β1. Έχουμε: $(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ή } \Delta=36-32=4 \text{ Άρα } x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{16}\left\langle \begin{array}{l}\frac{1}{2}\\[4pt] \frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ και $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

Άρα $P(A)=\frac{1}{3}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Β2. Έχουμε: $P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-1+P(A\cup B)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Και $P(\Delta)=P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β3. Έχουμε:

$$P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

B4. Λύνουμε την εξίσωση: $9x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 + 72 = 81$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{18} \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

Εφόσον $0 \le P(\Gamma) \le 1$ απορρίπτεται η ρίζα $x_1 = -\frac{1}{3}$

Οπότε $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$

Υπολογίζουμε και το P(B) από τον προσθετικό νόμο και έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

Έστω τα ενδεχόμενα Β, Γ ότι είναι ασυμβίβαστα, άρα θα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, δηλαδή:

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1 \quad \text{άτοπο}$$

Άρα τα ενδεχόμενα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα

<u>Θέμα 3^{o} :</u>

Γ1. Οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 10 ανήκουν στην πρώτη κλάση. Άρα $f_1\% = 10$.
Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 ανήκουν στην πέμπτη κλάση .
Άρα $f_5\% = 30$.
Έστω α_3 η γωνία της τρίτης κλάσης στο κυκλικό διάγραμμα. Ισχύει : $\frac{\nu_3}{\nu} = \frac{\alpha_3}{360} \rightarrow f_3 = \frac{108}{360}$
ή $f_3 = 0.3$ ή $f_3\% = 0.3 \cdot 100 = 30\%$.

Για τις σχετικές επί τοις εκατό συχνότητες ισχύει ότι : $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$

$$10 + f_2\% + 30 + f_4\% + 30 = 100$$
$$f_2\% + f_4\% = 30 \ \text{(σχέση Ι)}$$

Επίσης $\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5$

$$100 \cdot \bar{x} = x_1 \cdot f_1 \cdot 100 + x_2 \cdot f_2 \cdot 100 + x_3 \cdot f_3 \cdot 100 + x_4 \cdot f_4 \cdot 100 + x_5 \cdot f_5 \cdot 100$$
$$100 \cdot 14 = 9 \cdot 10 + 11 \cdot f_2\% + 13 \cdot 30 + 15 \cdot f_4\% + 17 \cdot 30$$
$$11 f_2\% + 15 f_4\% = 410 \ \text{(σχέση ΙΙ)}$$

Από σχέση Ι και ΙΙ προκύπτει ότι : $f_2\% = 10$ και $f_4\% = 20$.

Γ2. $s^2 = \frac{(x_1 - 14)^2 \nu_1 + \cdots . (x_5 - 14)^2 \nu_5}{\nu} = 25 \cdot f_1 + 9 \cdot f_2 + \cdots 9 \cdot f_5 = 2.5 + 0.9 + 0.3 + 0.2 + 2.7 = 6.6$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.6} = 2.57$. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2.57}{14} = 0.18$ ή 18%>10%. Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ3. $\bar{x} = \frac{\sum_1^4 x_i \nu_i + x_5 \nu_5}{\nu}$

$14 = \frac{1780}{\nu} + x_5 \cdot f_5$

$\frac{1780}{\nu} = 14 - 5.1$

$\frac{1780}{\nu} = 8.9$ ή $\nu = \frac{1780}{8.9} = 200$ το μέγεθος του δείγματος.

Γ4.

Μέση τιμή: $\bar{a} = \frac{a_1 + ..a_5}{5}$ ή $a_1 + a_2 + \cdots . a_5 = 5\bar{a}$. (σχέση 1)

$\bar{\beta} = \frac{\beta_1 + \cdots .. \beta_5}{5} = \frac{\alpha_1 - \bar{\alpha} + \cdots ... \alpha_5 - \bar{\alpha}}{5} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 5\bar{\alpha}}{5} = 0$ (από σχέση 1)

Διακύμανση και Τυπική απόκλιση :

$s_B{}^2 = \frac{(\beta_1 - 0)^2 + \cdots (\beta_5 - 0)^2}{5} = \frac{\beta_1{}^2 + \cdots \beta_5{}^2}{5} = \frac{(\alpha_1 - \bar{\alpha})^2 + \cdots (\alpha_5 - \bar{\alpha})^2}{5 \cdot s_a{}^2} = \frac{s_a{}^2}{s_a{}^2} = 1$

Άρα $s_\beta = \sqrt{s_\beta{}^2} = \sqrt{1} = 1$.

Θέμα Δ :

Δ1. Φέρνοντας ΟΖ κάθετη στην ΑΒ δημιουργείται ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΒ και με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε $OB^2 = ZB^2 + OZ^2 \Rightarrow 25 = \frac{x^2}{4} + OZ^2 \Rightarrow OZ^2 = \frac{100 - x^2}{4} \Rightarrow OZ = \frac{\sqrt{100 - x^2}}{2}$

Και επειδή $OZ = \frac{A\Delta}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$.

Οπότε $E(x) = f(x) = AB * A\Delta = x\sqrt{100 - x^2}$

Δ2.

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{100 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{100 - x^2}^2 = x^2 \Rightarrow 100 - x^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \Rightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$$

Και επειδή $x > 0$, $x = 5\sqrt{2}$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} > 0 \Rightarrow \sqrt{100 - x^2} > \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{100 - x^2}^2 > x^2 \Rightarrow 100 - x^2 > x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 < 100 \Rightarrow x^2 < 50 \Rightarrow x < \sqrt{50} \Rightarrow x < 5\sqrt{2}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	+	-	
f	↗	↘	

Άρα το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$ όπου το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο με πλευρές μήκους $5\sqrt{2}$.

Δ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{98x} = \frac{f'(1)}{98} = \frac{\frac{98}{\sqrt{99}}}{98} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

$0 < P(A-B) < 1$ (1)
0<P(A)<1 (2)

$$(1) \Rightarrow 0^2 < P(A-B)^2 < 1^2 \xRightarrow{*(-1)} -1 < P(A-B)^2 < 0 \xRightarrow{+100} 99 < 100\text{-}P(A-B)^2 < 100$$

$$\Rightarrow \sqrt{99} < \sqrt{100-P(A-B)^2} < \sqrt{100} \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{100-P(A-B)^2}} < \frac{1}{\sqrt{99}} \xRightarrow{*(2)} 0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}} < \frac{1}{\sqrt{99}} < 5\sqrt{2}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και το άλλο μέλος της f ότι είμαστε στο διάστημα $(0\ ,\ 5\sqrt{2}\,)$ που η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε μπορούμε να την διώξουμε χωρίς να αλλάζει η φορά.

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}}\right) \Rightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P(A)^2}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P(A-B)^2}} \Rightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100-P(A-B)^2} \le P(A)\sqrt{100-P(A)^2} \Rightarrow f(P(A-B)) \le f(P(A)) \Rightarrow P(A-B) \le P(A)$$

που ισχύει αφού $A - B \subseteq A$.