Θέμα Α

Α.1 σελ 262

Α.2. σελ 151

Α.3. σελ 247

Α.4. (Σ – Λ – Λ – Σ – Σ)

Θέμα Β

Β.1

i. $|z+16| = 4|z+1| \Leftrightarrow |z+16|^2 = 16|z+1|^2 \Leftrightarrow$
$\ldots\ldots \Leftrightarrow |z| = 4$
Άρα οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(0,0)$ και ακτίνα ρ = 4 με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$

ii. Θέτω w = x+yi

$$|w+2-4i| = |w+4-6i| \Leftrightarrow |w+2-4i|^2$$
$$= |w+4-6i|^2 \Leftrightarrow \ldots\ldots$$
$$\Leftrightarrow 2w + 2iw + 2\bar{w} - 2i\bar{w} + 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2Re(z) + 2i \cdot 2Im(z)i + 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x - 4y + 32 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y = x + 8$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με άκρα $\mathrm{A}(-2,4)$ και $\mathrm{B}(-4,6)$ και εξίσωση

$$\varepsilon: y = x + 8$$

iii. Η απόσταση της ευθείας ε από την αρχή Ο των αξόνων είναι:

$$d(\varepsilon, O) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Όπου $x_0 = 0\ , y_0 = 0\ , A = 1\ , B = -1\ , \Gamma = 8$

$$min|w - z| = d(\varepsilon, O) - \rho = 4(\sqrt{2} - 1)$$

B.2.

i. $|1-\bar{z}w|^2 = (1-\bar{z}w)(1-z\bar{w}) = 1 - z\bar{w} - \bar{z}w + |z|^2|w|^2$

$$|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = |z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$|1-\bar{z}w|^2 - |z-w|^2 = 1 + |z|^2|w|^2 - |z|^2 - |w|^2 = .\dots. = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$ (1)

ii. Στη σχέση (1) θέτουμε $z = w \; και \; z_0 = z$ Επομένως :

$$|z| = 1 \Leftrightarrow (1-|z_0|^2)(1-|z|^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow |1-\bar{z_0}z|^2 - |z_0 - z|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|1-\bar{z_0}z|^2 = |z-z_0|^2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right| = 1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

Για κάθε x∈ℝ έχουμε:

$$f'(x) = 2x(f(x)+x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2xf(x) + 2x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - 2xf(x) = 2x^2 - 1 \overset{\cdot e^{-x^2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^{-x^2}f'(x) + e^{-x^2}(-2x)f(x) = 2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{-x^2}f(x)\right)' = \left(-xe^{-x^2}\right)'$$

Άρα $f(x)e^{-x^2} = -x \cdot e^{-x^2} + c$

Όμως $f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$

Επομένως $f(0)e^0 = -0e^0 + c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $f(x) = -x + e^{x^2}$

Γ.2

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ℝ με $f'(x) = 2xe^{x^2} - 1$

και $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2(2x^2+1)e^{x^2}$

Όμως $f''(x) > 0$ για κάθε x∈ℝ επομένως η f είναι κυρτή στο ℝ.

Γ.3

Είναι $f(1) = e - 1$ και $f'(1) = 2e - 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$

$$y - (e-1) = (2e-1)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y = (2e-1)x - e$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο ℝ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ βρίσκεται κάτω από την C_f.

Άρα για κάθε x∈ℝ ισχύει : $f(x) \geq (2e-1)x - e \Leftrightarrow$

$$e^{x^2} - x \geq 2ex - x - e \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2} \geq (2x-1)e \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x^2}}{e} \geq 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2-1} - 2x + 1 \geq 0$$

Γ.4

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$e^{x^4} = \frac{e^{x^2}}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x^4}}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x^4}}{e^{x^2}} = \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 e^{x^4} = x e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$2x^2 e^{x^4} = 2x e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$2x^2 e^{x^4} - 1 = 2x e^{x^2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x^2) = f'(x)$$

Η συνάρτηση f΄ είναι γνησίως αύξουσα (αφού f΄΄ > 0) άρα και 1- 1 τότε θα έχουμε:

$$f'(x^2) = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = x \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Απορρίπτεται Δεκτή (διότι x > 0)

Γ.5.

Είναι g(x)= $\int_{2-x}^{x} f(t)dt = \int_{2-x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt - \int_{0}^{2-x} f(t)dt$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ως διαφορά συναρτήσεων που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες με

$$g'(x) = f(x) - f(2-x)(2-x)' \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = f(x) - f(2-x)$$

Η g΄ είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$g''(x) = f'(x) - f'(2-x)$$

Είναι $g''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(2-x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x > 2-x \Leftrightarrow x > 1$

και $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

και $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα η συνάρτηση g είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$

και κυρτή στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ Δηλαδή στο $M(1, g(1))$ με

$g(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$ άρα $M(1,0)$

Δ1. Έχουμε: $x\int_0^1 f(xt)dt = \int_0^1 xf(xt)dt$.

Θέτουμε $xt = \omega$ άρα $xdt = d\omega$

Για $t = 0$ είναι $\omega = 0$

Για $t = 1$ είναι $\omega = x$

Οπότε $x\int_0^1 f(xt)dt = \int_0^x f(\omega)d\omega$

Επίσης: $\int_0^x \left[2e^{u-x} - (x-u)f(x-u)\right]du$

Θέτουμε $x - u = \omega$ άρα $-du = d\omega$

Για $u = 0$ είναι $\omega = x$

Για $u = x$ είναι $\omega = 0$

Οπότε

$$\int_0^x \left[2e^{u-x} - (x-u)f(x-u)\right]du = \int_0^x \left(2e^{-\omega} - \omega f(\omega)\right)d\omega$$

Συνεπώς,

$$xf(x) + x\int_0^1 f(xt)dt = \int_0^x \left[2e^{u-x} - (x-u)f(x-u)\right]du \Leftrightarrow$$

$$xf(x)+\int_0^x f(\omega)d\omega=\int_0^x\left(2e^{-\omega}-\omega f(\omega)\right)d\omega \Rightarrow$$

$$\left(\int_0^x f(\omega)d\omega\right)'=\left(\int_0^x\left(2e^{-\omega}-\omega f(\omega)\right)d\omega\right)' \Rightarrow$$

$$f(x)+xf'(x)+f(x)=2e^{-x}-xf(x)\Rightarrow$$

$$xf'(x)+2f(x)=2e^{-x}-xf(x)$$

Δ2. Είναι $xf'(x)+2f(x)=2e^{-x}-xf(x)\Leftrightarrow$

$$xf'(x)+2f(x)+xf(x)=2e^{-x}\overset{\cdot xe^{x}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2e^x f'(x)+2xe^x f(x)+x^2e^x f(x)=2x\Leftrightarrow$$

$\left(x^2e^x f(x)\right)'=\left(x^2\right)'$, επομένως από συνέπειες Θ.Μ.Τ.

$$x^2e^x f(x)=x^2+c$$

Για $x=0$, $0\cdot e^0\cdot f(0)=0+c\Leftrightarrow c=0$

Οπότε $x^2e^x f(x)=x^2$

Για $x\neq 0$, $\cancel{x^2}e^x f(x)=\cancel{x^2}\Leftrightarrow e^x f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, τότε είναι και συνεχής,
άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=1$

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$

Δ3. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{e^{x}x}=0=\lambda$, διότι:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{e^{x}x}\right|\le\frac{1}{|e^{x}x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|e^{x}x|}\le\frac{\eta\mu x}{e^{x}x}\le\frac{1}{|e^{x}x|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{xe^{x}}\right)=0\end{array}\right\}\text{και κριτήριο παρεμβολής: }\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{e^{x}x}=0$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)\overset{\lambda=0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{e^{x}}=0=\beta$,

αφού $\left|\dfrac{\eta\mu x}{e^{x}}\right|\le\dfrac{1}{|e^{x}|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|e^{x}|}\le\dfrac{\eta\mu x}{e^{x}}\le\dfrac{1}{|e^{x}|}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{e^{x}}\right)=0\end{array}\right\}\text{ και κριτήριο παρεμβολής: }\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{e^{x}}=0$$

Η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-e^{-x}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=e^{-x}>0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{2\left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)\right]}{\beta - \alpha}$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]}{\beta - \alpha}$$

Για $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Rightarrow$

$$\frac{\cancel{2}\left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)\right]}{\cancel{\beta - \alpha}} < \frac{\cancel{2}\left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]}{\cancel{\beta - \alpha}} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta)\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Rightarrow$$

$$e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}<\frac{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}{2}\Rightarrow-\frac{\alpha+\beta}{2}<\ln\frac{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}>-\ln\frac{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}{2}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{2}>\ln\left(\frac{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}{2}\right)^{-1}\Rightarrow$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}>\ln\frac{2}{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}$$

Δ5. Έχουμε $\int_{1/e}^{1/2}\sqrt{-\ln x}\,dx$

Θέτουμε $\sqrt{-\ln x}=\omega\Leftrightarrow-\ln x=\omega^2\Leftrightarrow x=e^{-\omega^2}$

$dx=-2\omega e^{-\omega^2}d\omega$

Για $x=1/e$ είναι $\omega=1$

Για $x=1/2$ είναι $\omega=\sqrt{\ln 2}$

Συνεπώς: $\int_{1/e}^{1/2}\sqrt{-\ln x}\,dx+\int_{1}^{\sqrt{\ln 2}}f\left(x^2\right)dx=$

$$=\int_{1}^{\sqrt{\ln 2}}\omega\cdot(-2\omega)e^{-\omega^2}d\omega+\int_{1}^{\sqrt{\ln 2}}e^{-\omega^2}d\omega=$$

$$=\int_{1}^{\sqrt{\ln 2}}\left(e^{-\omega^2}+\omega\cdot\left(e^{-\omega^2}\right)'\right)d\omega=\left[\omega e^{-\omega^2}\right]_1^{\sqrt{\ln 2}}=\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}-\frac{1}{e}$$