

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 224.

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 280.

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 169.

- A4. i. Σωστό
 ii. Σωστό
 iii. Σωστό
 iv. Λάθος
 v. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι z_1 φανταστικός, εάν και μόνο αν $\text{Re}(z_1) = 0$ (1)

α) Φέρνουμε τον z_1 στην μορφή $\kappa + \lambda i$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = \frac{(1 + \beta i - 2i) \cdot (\alpha + 2 + i)}{(\alpha + 2 - i) \cdot (\alpha + 2 + i)}$$

$$= \frac{\alpha + 2 + i + \alpha \beta i + 2\beta i - \beta - 2\alpha i - 4i + 2}{(\alpha + 2)^2 + 1}$$

$$= \frac{\alpha - \beta + 4}{(\alpha + 2)^2 + 1} + \frac{\alpha\beta + 2\beta - 2\alpha - 3}{(\alpha + 2)^2 + 1} i$$

Από την σχέση (1) προκύπτει $\frac{\alpha - \beta + 4}{(\alpha + 2)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + 4 = 0$.

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται από όλα τα σημεία $M (α, β)$ του μιγαδικού επιπέδου τα οποία είναι εικόνες του $z = a + bi$ και μόνο αυτά. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $x - y + 4 = 0$.

β) Έστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } w - \frac{1}{2}i = x + (y - \frac{1}{2})i$$

$$\text{Επομένως, } \text{Im}(w - \frac{1}{2}i) = y - \frac{1}{2}$$

Έχουμε:

$$\left| (1-i) \text{Im} \left(w - \frac{1}{2}i \right) \right| = \sqrt{2} \left| w + \frac{1}{2}i \right| \Leftrightarrow (1-i) \left(y - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \left| x + yi + \frac{1}{2}i \right|$$

$$\Leftrightarrow |1-i| \left| y - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{2} \left| x + \left(y + \frac{1}{2} \right) i \right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \left| y - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left| y - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2y = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η γραμμή με εξίσωση $x^2 + 2y = 0$, η οποία είναι παραβολή, αφού $\Leftrightarrow x^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$

B2. Το $|z - w|$ ισούται με την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w , επομένως εκφράζει την απόσταση των σημείων της ευθείας $(\epsilon): x - y + 4 = 0$ από τα σημεία της παραβολής $C: y = -\frac{1}{2}x^2$.

Έστω $M(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο της παραβολής, και N τυχαίο σημείο της ευθείας. Σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι $MN \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}$. Θεωρούμε την προβολή M_0 του M στην ευθεία. Προφανώς

$MN \geq MM_0$. Επειδή $y_0 = -\frac{1}{2}x_0^2$ είναι $M \left(x_0, -\frac{1}{2}x_0^2 \right)$ η απόσταση του M από την ευθεία (ϵ) είναι:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014

E_3.Μλ3ΘΤ(α)

$$MM_0 = d(M, \varepsilon) = \frac{\left| x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + 4 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x_0^2 + 2x_0 + 8|}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

επομένως

$$MM_0 = \frac{|(x_0 + 1)^2 + 7|}{2\sqrt{2}} = \frac{(x_0 + 1)^2 + 7}{2\sqrt{2}} \geq \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

Συνεπώς $MN \geq MM_0 \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

2ος τρόπος εύρεσης του ελαχίστου από την (1).

Έστω $f(x) = x^2 + 2x + 8$, $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1, \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Άρα για $x = -1$, η f έχει ελάχιστο το $f(-1) = 7$, οπότε $x_0^2 + 2x_0 + 8 \geq 7$ και από την (1)

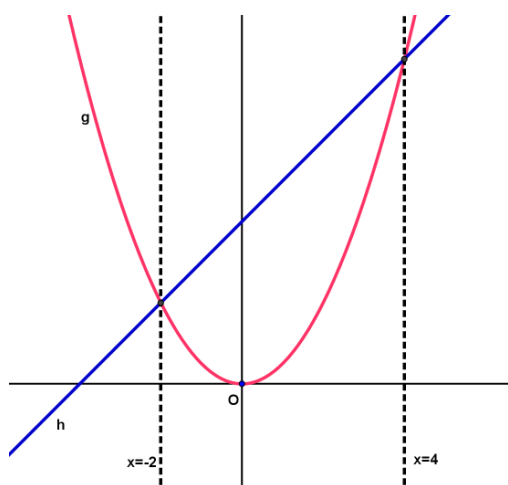
$$MM_0 = d(M, \varepsilon) \geq \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

- B3. α)** Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$. Εφόσον οι εικόνες του w είναι τα σημεία $\left(x, -\frac{1}{2}x^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$, οι εικόνες του \bar{w} , είναι τα $\left(x, \frac{1}{2}x^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$, που έχουν γεωμετρικό τόπο την παραβολή $C: y = \frac{1}{2}x^2$, αφού αυτά και μόνο αυτά την επαληθεύουν.

- β)** Έστω $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ και $h(x) = x + 4$. Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $g(x) - h(x)$. Είναι

$$g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2$$

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$g(x) - h(x)$	$+$	\ominus	\ominus	$+$



Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-2}^4 |g(x) - h(x)| \, dx = \int_{-2}^4 [h(x) - g(x)] \, dx \\
 &= \int_{-2}^4 \left(x + 4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \, dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6} \right]_{-2}^4 = 18 \text{ τμ.}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι

$$\begin{aligned}
 f'(x) - f(x) &= e^x g'(x) - 1 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} e^x g'(x) - e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = g'(x) - e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow [f(x) e^{-x}]' = [g(x) + e^{-x}]' \\
 &\Leftrightarrow f(x) e^{-x} = g(x) + e^{-x} + c, \quad (1) \text{ με } c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου $x = 1$, έχουμε

$$f(1)e^{-1} = g(1) + e^{-1} + c \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-1} + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως η (1) δίνει $f(x) = e^x g(x) + 1, x \in \mathbb{R}$.

Γ2. α) Από την σχέση $f'(x) - f(x) = e^x g'(x) - 1$, για $x = 1$ έχουμε

$$f'(1) - f(1) = e g'(1) - 1 \Leftrightarrow f'(1) = e g'(1), \quad (2)$$

Ακόμα

$$2f(x) + x^2 - 2x \geq 1 \Leftrightarrow 2f(x) + x^2 - 2x - 1 \geq 0 \quad (3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν θεωρήσουμε $2f(x) + x^2 - 2x - 1 = \varphi(x)$, τότε επειδή

$$2f(1) + 1 - 2 - 1 = \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(1) = 0,$$

η (3) γράφεται $\varphi(x) \geq \varphi(1)$. Συνεπώς η $\varphi(x)$ παρουσιάζει για $x = 1$ (ολικό) ελάχιστο. Ακόμη η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$\varphi'(x) = 2f'(x) + (x^2 - 2x - 1)' \Leftrightarrow \varphi'(x) = 2f'(x) + 2x - 2.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014

E_3.Μλ3ΘΤ(α)

Για την $\varphi(x)$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat, άρα $\varphi'(1) = 0$, ή ισοδύναμα

$$2f'(1) + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

Επομένως από την (2) έχουμε: $eg'(1) = 0 \Leftrightarrow g'(1) = 0$.

β) Έστω $x > 0$. Θέτουμε $\frac{x+2}{x+1} = t$, οπότε

$$\frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = t \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = t-1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{t-1}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$, το t τείνει στο 1. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)g\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \left[\frac{1}{t-1} g(t) \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \left[\frac{g(t) - g(1)}{t-1} \right] = g'(1) = 0$$

Γ3. α) Είναι $f(x) = e^x g(x) + 1$ και $g(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$f(x) = e^x (x-1)^2 + 1, x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \left[e^x (x-1)^2 + 1 \right]' = e^x (x-1)^2 + 2e^x (x-1) = e^x (x-1)(x+1)$$

Ο πίνακας με τις ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$, τη μονοτονία και τα ακρότατα της f είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		$\frac{4}{e} + 1$	1		

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για $x < -1$, $f'(x) < 0$ για $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0$ για $x > 1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^x (x-1)^2 + 1 \right] = 0 + 1 = 1,$$

αφού

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x (x-1)^2] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[(x-1)^2]'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x-1)}{-e^{-x}} \\ &\stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x-1)'}{-(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x (x-1)^2 + 1] = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -1$ το $f(-1) = \frac{4}{e} + 1$ και

ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1$. Αν

$$A_1 = (-\infty, -1), \quad A_2 = [-1, 1] \quad \text{και} \quad A_3 = (1, +\infty),$$

τότε

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \frac{4}{e} + 1 \right) = \left(1, \frac{4}{e} + 1 \right),$$

$$f(A_2) = [f(1), f(-1)] = \left[1, \frac{4}{e} + 1 \right] \quad \text{και}$$

$$f(A_3) = \left(1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty).$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [1, +\infty)$$

β) Η $h(x) = e^x(1-x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$h'(x) = [e^x(1-x) + 1]' = e^x(1-x) - e^x = -xe^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Έστω ε η εφαπτομένη που φέρουμε στη C_h από το σημείο $M(1, \lambda)$ και $(x_0, h(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0),$$

η οποία γράφεται

$$y - e^{x_0}(1-x_0) - 1 = -x_0 e^{x_0}(x - x_0)$$

Επειδή το $M(1, \lambda)$ είναι σημείο της εφαπτομένης, για $x = 1$ και $y = \lambda$ η τελευταία σχέση δίνει

$$\begin{aligned} \lambda - e^{x_0}(1-x_0) - 1 &= -x_0 e^{x_0}(1-x_0) \Leftrightarrow \lambda = 1 + e^{x_0}(1-x_0 - x_0 + x_0^2) \\ &\Leftrightarrow e^{x_0}(x_0 - 1)^2 + 1 = \lambda \\ &\Leftrightarrow f(x_0) = \lambda \end{aligned}$$

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1, A_2, A_3 , οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$, έχει το πολύ μία λύση σε καθένα από αυτά και, συνεπώς, συνολικά έχει το πολύ τρεις λύσεις στο \mathbb{R} . Αυτό αποδεικνύει, ότι από το σημείο $M(1, \lambda)$ άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη C_h .

2ος τρόπος απόδειξης, ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει το πολύ τρεις ρίζες. Υποθέτουμε ότι έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες τις $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$. Αυτές είναι ρίζες και της συνάρτησης

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda$$

Η φ είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], [\rho_3, \rho_4]$ και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$ με $\varphi'(x) = f'(x)$ και ακόμα

$$\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2) = \varphi(\rho_3) = \varphi(\rho_4) = 0$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$, οπότε υπάρχουν $\kappa_1 \in (\rho_1, \rho_2), \kappa_2 \in (\rho_2, \rho_3), \kappa_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοια, ώστε

$$\varphi'(\kappa_1) = \varphi'(\kappa_2) = \varphi'(\kappa_3) = 0$$

Προφανώς $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$. Επειδή $\varphi'(x) = f'(x)$ προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, τις $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, που είναι άτοπο, διότι, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο ερώτημα, έχει δύο ακριβώς δύο ρίζες τις $x = 1, x = -1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \int_0^x 2t^2 e^{t^2} dt - x e^{x^2} + x$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο

$$h'(x) = 2x^2 e^{x^2} - (e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}) + 1 = 1 - e^{x^2}$$

Η h' μηδενίζεται για $x = 0$ και για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow 1 - e^{x^2} < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$$

Επομένως, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε έχουμε:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \Leftrightarrow x > 0 \quad (1)$$

Η πρώτη από τις δοσμένες ανισότητες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δίνει:

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2} dt - g''(x) e^{[g''(x)]^2} + g''(x) < 0$$

ή $h(g''(x)) < 0$ και λόγω της (1): $g''(x) > 0$, που σημαίνει ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

2^{ος} τρόπος

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2} dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} t(e^{t^2})' dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & \left[t e^{t^2} \right]_0^{g''(x)} - \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & g''(x) e^{[g''(x)]^2} - \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt > g''(x) \end{aligned} \quad (1^*)$$

Και τώρα συνεχίζουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} (1^*) \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt > \int_0^{g''(x)} dt \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt - \int_0^{g''(x)} dt > 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} (e^{t^2} - 1) dt > 0 \end{aligned} \quad (2^*)$$

Επειδή $e^{t^2} - 1 \geq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η (2*) αποκλείει $g''(x) \leq 0$, αφού τότε θα είχαμε $\int_0^{g''(x)} (e^{t^2} - 1) dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^{g''(x)} (e^{t^2} - 1) dt \leq 0$, άτοπο. Επομένως $g''(x) > 0$, που σημαίνει ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση f με

$$f(x) = \int_{-2}^{g(x)} e^{t^2} dt, \quad x \in [0, 1]$$

Η f είναι συνεχής, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων g και g_1 με

$$g_1(x) = \int_{-2}^x e^{t^2} dt. \text{ Ακόμα}$$

$$f(0)f(1) = \int_{-2}^{g(0)} e^{t^2} dt \int_{-2}^{g(1)} e^{t^2} dt < 0$$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$ ή

$$\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2} dt = 0 \quad (2)$$

- Αν $g(\rho) > -2$, επειδή $e^{t^2} > 0$ θα είναι $\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2} dt > 0$ άτοπο από την (2).
- Αν $g(\rho) < -2$ επειδή $e^{t^2} > 0$ θα είναι $\int_{g(\rho)}^{-2} e^{t^2} dt > 0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2} dt < 0$, ομοίως άτοπο από την (2).

Επομένως $g(\rho) = -2$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\rho, 2]$, αφού ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $[\rho, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(\rho, 2)$ και ακόμα $g(\rho) = g(2) = -2$. Επομένως, υπάρχει $x_0 \in (\rho, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \quad (3)$$

Αλλά η g' είναι γνησίως αύξουσα οπότε:

$$\rho < x_0 < 2 \Rightarrow g'(\rho) < g'(x_0) < g'(2) \Rightarrow g'(\rho) < 0 < g'(2)$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Δ3. Έστω $x_0 < x < 2$. Θέτουμε

$$u = \frac{x-3}{g(x)+2}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} u = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{g(x)+2} = +\infty$ διότι:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1 < 0$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} [g(x)+2] = 0$
- $g(x)+2 < 0$, γιατί από την μονοτονία της g' είναι

$$x > x_0 \Rightarrow g'(x) > g'(x_0) \Rightarrow g'(x) > 0,$$

που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Έτσι

$$x_0 < x < 2 \Rightarrow g(x) < g(2) \Rightarrow g(x) < -2 \Rightarrow g(x)+2 < 0$$

Στη συνέχεια το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014

E_3.Μλ3ΘΤ(α)

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(2, g(2))$ έχει εξίσωση:

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = g'(2)x - 2g'(2) + g(2)$$

Επειδή η g' είναι γνησίως αύξουσα η g είναι κυρτή στο \mathbb{R} , οπότε τα σημεία της C_g είναι πάνω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της, εκτός του σημείου επαφής, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g'(2)x - 2g'(2) + g(2) \quad (4)$$

Επειδή $g'(2) > 0$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g'(2)x - 2g'(2) + g(2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g'(2)x] = +\infty$$

Αν $h(x) = g'(2)x - 2g'(2) + g(2)$, με $x \in \mathbb{R}$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ θα υπάρχει $\alpha > 0$, ώστε στο $(\alpha, +\infty)$ είναι $h(x) > 0$ οπότε από (4) είναι

$$g(x) \geq h(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{h(x)}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{h(x)} = 0$, από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Αν $\varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty,$$

διότι είναι $\varphi(x) > 0$ στο $(\alpha, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

Ωστε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty$$

Δ4. Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x = 1$. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική. Πραγματικά είναι:

$$g(1+x-x^3) = g(1) + g(x) - g(x^3) \Leftrightarrow g(1+x-x^3) - g(1) = g(x) - g(x^3) \quad (5)$$

- Αν υποθέσουμε ότι $x > 1$, τότε θεωρούμε τα διαστήματα $[1+x-x^3, 1]$ και $[x, x^3]$. Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν $1 < x < x^3$ και $1+x-x^3 < 1 \Leftrightarrow x < x^3$, δηλαδή $1+x-x^3 < 1 < x < x^3$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014

E_3.Μλ3ΘΤ(α)

Εφαρμόζεται, τώρα, για την g το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα $[1+x-x^3, 1]$ και $[x, x^3]$, γιατί η g είναι συνεχής σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως, ξ_1, ξ_2 με

$$1+x-x^3 < \xi_1 < 1 < x < \xi_2 < x^3, \quad (6)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1)-g(1+x-x^3)}{x^3-x} = g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x^3)-g(x)}{x^3-x} = g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$-g'(\xi_1) = -g'(\xi_2) \Rightarrow g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (6) και την μονοτονία της g' είναι

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow g'(\xi_1) < g'(\xi_2)$$

- Πάλι, αν υποθέσουμε ότι $0 < x < 1$, τότε εργαζόμαστε στα διαστήματα $[1, 1+x-x^3]$ και $[x^3, x]$. Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν $x^3 < x < 1$ (και $1 < 1+x-x^3 \Leftrightarrow x^3 < x$, δηλαδή

$$x^3 < x < 1 < 1+x-x^3$$

Εφαρμόζεται, ομοίως, για την g το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα $[1, 1+x-x^3]$ και $[x^3, x]$, γιατί η g είναι συνεχής σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως, ξ_1, ξ_2 με

$$x^3 < \xi_2 < x < 1 < \xi_1 < 1+x-x^3, \quad (7)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1+x-x^3)-g(1)}{x-x^3} = g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x)-g(x^3)}{x-x^3} = g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (7) και την μονοτονία της g' είναι

$$\xi_2 < \xi_1 \Rightarrow g'(\xi_2) < g'(\xi_1)$$

Όστε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την προφανή $x = 1$.