ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ 251
Α2. Σελ 273
Α3. Σελ 150
Α4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $2|z|^2+(z+\bar{z})\cdot i-4-2i=0$. Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$2\left(x^2+y^2\right)+2xi-4-2i=0\Leftrightarrow\left(2x^2+2y^2-4\right)+(-2x-2)i=0\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}2x^2+2y^2-4=0\\2x-2=0\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}x^2+y^2=2\\x=1\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}y=\pm1\\x=1\end{cases}\right\}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι: $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. Έχουμε $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i-1}{1^2-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$ και $i^{39}=i^{36}\cdot i^3=\left(i^4\right)^9\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$

Οπότε $w=3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\cdot(-i)=-3i$

Β3. $|u+w|=|4z_1-z_2-i|\Leftrightarrow|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i|\Leftrightarrow|u-3i|=|4+4i-1+i-i|\Leftrightarrow$

$|u-3i|=|3+4i|\Leftrightarrow|u-3i|=5$ αφού $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $h(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$ με $x\in R$. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $h'(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ για κάθε $x\in R$. Η συνάρτηση h' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $h''(x)=-\dfrac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ2. $e^{h\left(2h'(x)\right)} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln\left(e^{h\left(2h'(x)\right)}\right) < \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow$

$h\left(2h'(x)\right) < 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < h(1) \qquad (1)$

Έχουμε $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$ για κάθε $x \in R$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα από την (1) έχω : $h\left(2h'(x)\right) < h(1) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \overset{h'\searrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

Γ3 $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 - \ln\frac{(e^x+1)}{x}) = 1 - 1 = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, DLH\right) \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της h στο $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x - \ln(e^x+1)}{x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}, DLH\right) \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\right) = \frac{1}{0+1} = 1 = \lambda$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x - \ln(e^x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\right) = \frac{1}{0+1} = 1 = \lambda$

$\lim_{x\to-\infty} \left(h(x) - \lambda x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(h(x) - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\ln(e^x+1)\right) = -\ln 1 = 0$

Επομένως η $y = x$ είναι πλάγια της h στο $-\infty$.

Γ4 $\varphi(x) = e^x(x - \ln(e^x+1) + \ln 2) = e^x\left(x + \ln\frac{2}{e^x+1}\right)$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x + \ln\frac{2}{e^x+1} = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{e^x+1} = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{e^x+1} = -x \Leftrightarrow 2 = 1 + e^{-x} \Leftrightarrow$

$e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$\text{E} = \int_0^1 |\varphi(x)| dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 e^x\left(x + \ln\frac{2}{e^x+1}\right)dx = \left[e^x\left(x + \ln\frac{2}{e^x+1}\right)\right]_0^1 \int_0^1 e^x\left(1 + \frac{1}{\frac{2}{e^x+1}}\left(\frac{2}{e^x+1}\right)'\right)dx =$

$e\left(1+\ln\frac{2}{e+1}\right)-\int_0^1 e^x\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=e\left(1+\ln\frac{2}{e+1}\right)-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx.(1)$

Θέτω $I=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_2^{e+1}\frac{1}{u}du=\left[\ln|u|\right]_2^{e+1}=\ln\frac{e+1}{2}$

Θέτουμε $e^x+1=u, du=e^x dx$

Για x=0 έχουμε $u_1=2$

Για x=1 έχουμε $u_2=e+1$

Τότε η (1) γίνεται $E=e+e\ln\frac{2}{e+1}-\ln\frac{e+1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1$ και $f(0)=1$ οπότε έχουμε:

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_o=0$

Επίσης η f είναι συνεχής όταν $x\neq 0$ ως πράξεις συνεχών (εκθετική, πολυωνυμική)

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\neq 0$ ως πράξεις παραγωγισίμων με

$f'(x)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, $x\neq 0$

Θεωρώ $h(x)=xe^x-e^x+1$ παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$

με $h'(x)=xe^x+\cancel{e^x}-\cancel{e^x}=xe^x$

$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και $h'(x)>0\Leftrightarrow x>0$ οπότε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$

Άρα η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_o=0$ με τιμή $h(0)=0$

οπότε από τον ορισμό έχουμε $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)>0$ για $x\neq 0$

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2.

α) Θα υπολογίσω το $f'(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

Άρα $f'(0)=\frac{1}{2}$

Στην εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du=0$ για $x=0$ έχω

$\int_1^{2f'(0)} f(u)\,du=0 \Leftrightarrow \int_1^{2\cdot\frac{1}{2}} f(u)\,du=0 \Leftrightarrow \int_1^{1} f(u)\,du=0$ που ισχύει άρα η $x_o=0$ είναι λύση της εξίσωσης.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ γιατί:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2} \text{ και } f'(0)=\frac{1}{2}$$

οπότε $\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_o=0$

Για $x\neq 0$ η f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

Άρα η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Για $x>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0) \Rightarrow f'(x)>\frac{1}{2} \Rightarrow 2f'(x)>1$

Για $x<0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0) \Rightarrow f'(x)<\frac{1}{2} \Rightarrow 2f'(x)<1$

Επίσης από Δ1, έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα, άρα

Για $x>0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>1 \Rightarrow f(x)>0$

Οπότε $f(u)>0 \overset{1<2f'(x)}{\Rightarrow} \int_1^{2f'(x)} f(u)\,du>0$ άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα για $x>0$

Για $x<0$ θα εργασθούμε κατασκευαστικά:

Έχουμε: $x<0 \overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow} e^x<1 \Rightarrow e^x-1<0$ και $x<0$ οπότε και $\frac{e^x-1}{x}>0 \Rightarrow f(x)>0$

Οπότε πάλι $f(u)>0 \overset{1>2f'(x)}{\Rightarrow} \int_1^{2f'(x)} f(u)\,du<0$ άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα για $x<0$

Άρα μοναδική ρίζα $x=0$

β) Το υλικό σημείο Μ θα έχει συντεταγμένες $M\left(x(t),y(t)\right)$. Αφού κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, τότε θα ισχύει ότι $y(t)=\dfrac{e^{x(t)}-1}{x(t)}$ άρα παραγωγίζοντας έχουμε:

$y'(t)=\left(\dfrac{e^{x(t)}-1}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow y'(t)=\dfrac{e^{x(t)}\cdot x'(t)\cdot x(t)-\left(e^{x(t)}-1\right)\cdot x'(t)}{\left(x(t)\right)^2}$. Αντικαθιστώντας $x'(t)=2y'(t)$ προκύπτει ότι:

$$x'(t)=2\frac{e^{x(t)}\cdot x'(t)\cdot x(t)-\left(e^{x(t)}-1\right)\cdot x'(t)}{\left(x(t)\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{x'(t)}\cdot\left(x(t)\right)^2}{2}=e^{x(t)}\cdot\cancel{x'(t)}\cdot x(t)-\left(e^{x(t)}-1\right)\cdot\cancel{x'(t)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x(t)\right)^2}{2}=e^{x(t)}\cdot x(t)-\left(e^{x(t)}-1\right)\Leftrightarrow\left(x(t)\right)^2=2e^{x(t)}\cdot x(t)-2e^{x(t)}+2$$

Άρα αναζητούμε λύση της εξίσωσης

$$x^2=2xe^x-2e^x+2\Leftrightarrow x^2=2\cdot\left(xe^x-e^x+1\right)\Leftrightarrow\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$$

Παρατηρώ ότι $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ το οποίο είναι μοναδικό αφού f' είναι γνησίως αύξουσα (Δ2 α) άρα και 1-1. Οπότε $f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$

Άρα το σημείο που αναζητούμε θα είναι το $M_o\left(0,f(0)\right)$ δηλαδή το $M_o(0,1)$

Δ3. $g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2\cdot(x-2)^2$ με $x>0$

Αντικαθιστώντας τον τύπο της f προκύπτει ότι $g(x)=\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)^2$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων με

$g'(x)=2\left(e^x-e\right)\cdot e^x\cdot(x-2)^2+2\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)=$

$2\cdot\left(e^x-e\right)\cdot(x-2)\cdot\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]=$

$2\cdot\left(e^x-e\right)\cdot(x-2)\cdot\left[xe^x-2e^x+e^x-e\right]=$

$2\cdot\left(e^x-e\right)\cdot(x-2)\cdot\left(xe^x-e^x-e\right)$

Θεωρώ $k(x)=xe^x-e^x-e$ με $A_k=\mathbb{R}$ και k συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών (εκθ, πολ.)

Η k είναι συνεχής στο $[1,2]$

$$\left.\begin{array}{l} k(1)=-e<0 \\ k(2)=e^2-e=(e-1)e>0 \end{array}\right\} \Rightarrow k(1)\cdot k(2)<0$$

Άρα από το **Θεώρημα Bolzano** θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $k(x_o)=0$

Επίσης $k'(x)=xe^x+e^x-e^x=xe^x>0$ για κάθε $x>0$ οπότε και k γνησίως αύξουσα στο

$[0,+\infty)$ άρα για $x>x_o \overset{k\nearrow}{\Leftrightarrow} k(x)>k(x_o) \Leftrightarrow k(x)>0$

Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμων:

	$-\infty$ … 0	0 … 1	1	1 … x_o	x_o	x_o … 2	2	2 … $+\infty$
e^x-e		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
xe^x-e^x-e		$-$		$-$	0	$+$		$+$
γινόμενο		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα έχουμε και τον πίνακα μονοτονίας της g

	$-\infty$ … 0	0 … 1	1	1 … x_o	x_o	x_o … 2	2	2 … $+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Οπότε η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1=1$ και $x_2=2$ ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0

Επιμέλεια

Μίλτος Τσαλιγόπουλος – Δημήτρης Βερέμης – Βασίλης Μήτρου

Γιώργος Πανούσης – Ευαγγελία Χανδρή