ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ 2014

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 59

Α4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το ύψος του κάθε ιστού στο ιστόγραμμα συχνοτήτων παίρνω την αντίστοιχη συχνότητα της κάθε κλάσης. Οπότε : $\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 8$, $\nu_3 = 14$, $\nu_4 = 6$

Άρα $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 40$

Β2. Έχω $f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{12}{40} = 0.3$, $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{8}{40} = 0.2$, $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{14}{40} = 0.35$

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{40} = 0.15$

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i
[2 , 4)	3	12	0,30
[4 , 6)	5	8	0,20
[6 , 8)	7	14	0,35
[8 , 10)	9	6	0,15
Σύνολο	-	40	1

Β3. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 3 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.35 + 9 \cdot 0.15 = 5.7$

Άρα $\bar{x} = 5700$ €

Β4. Οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις πάνω από 4.500 είναι αυτοί που αντιστοιχούν:

Σε όλη την τέταρτη κλάση άρα $\nu_4 = 6$

Σε όλη την τρίτη κλάση άρα $\nu_3 = 14$

Και στα $\frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{6-4,5}{6-4}=\frac{3}{4}\right)$ της δεύτερης κλάσης άρα $\frac{3}{4}\nu_2 = 6$ εφόσον οι παρατηρήσεις θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες. Οπότε οι πωλητές είναι 26

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f(x)=4x^3-\frac{7}{2}x^2+x-1$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$f'(x)=12x^2-7x+1$

Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-7x+1=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{4}$ και $x_2=\frac{1}{3}$ με $x_1<x_2$

x	$-\infty$	$1/4$		$1/3$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		τ. μ		τ. ε	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$ και στο $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_1=\frac{1}{4}$ με τιμή $f\left(\frac{1}{4}\right)$ και ολικό ελάχιστο στη θέση $x_2=\frac{1}{3}$ με τιμή $f\left(\frac{1}{3}\right)$

Οπότε $P(K)=x_1=\frac{1}{4}$ και $P(A)=x_2=\frac{1}{3}$

Γ2 $\Gamma=K\cup A$, $\Delta=(K\cup A)'$ και $E=(A\cup \Pi')$ όπου τα ενδεχόμενα Α, Κ και Π είναι ασυμβίβαστα. Έτσι έχουμε:

$$P(\Gamma)=P(K\cup A)\overset{K,A\text{ ασυμβ.}}{=}P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

$$P(\Delta)=P(K\cup A)'=1-P(K\cup A)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

Έχουμε ότι $\Pi'=A\cup K$ άρα $A\cup(A\cup K)=A\cup K$

Άρα $P(E)=P(A\cup K)=\frac{7}{12}$

(β τρόπος)

Ισχύει ότι $P(A)+P(K)+P(\Pi)=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+P(\Pi)=1\Leftrightarrow P(\Pi)=\frac{5}{12}$

$$P(A\cup\Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap\Pi')=P(A)+1-P(\Pi)-P(A-\Pi)=$$

$$\cancel{P(A)}+1-P(\Pi)-\cancel{P(A)}+P(A\cap\Pi)=1-P(\Pi)+0=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

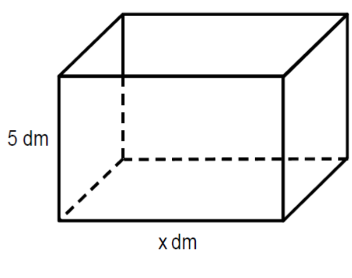
Γ3 Ισχύει ότι $P(A)+P(K)+P(\Pi)=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+P(\Pi)=1\Leftrightarrow P(\Pi)=\frac{5}{12}$

$$N(A)+4=N(\Pi)\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{4}{N(\Omega)}=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(A)+\frac{4}{N(\Omega)}=P(\Pi)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{N(\Omega)}=\frac{5}{12}\Leftrightarrow\frac{4}{N(\Omega)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow N(\Omega)=48$$

Άρα το δοχείο έχει 48 μπάλες.

ΘΕΜΑ Δ



Έστω y το μήκος της άλλης πλευράς. Η περίμετρος της βάσης είναι

$$P=2x+2y=2(x+y)\Leftrightarrow 2(x+y)=20\Leftrightarrow x+y=10\Leftrightarrow y=10-x$$

Η επιφάνεια της βάσης θα είναι: $E_B=x\cdot y=x\cdot(10-x)=10x-x^2$

Η επιφάνεια των πλαϊνών «μεγάλων» βάσεων (όπως φαίνεται

στο σχήμα) θα είναι $E_{B1}=5x$ και η επιφάνεια των πλαϊνών «μικρών» θα είναι

$$E_{B2}=5\cdot y=5\cdot(10-x)=50-5x$$

Άρα η συνολική επιφάνεια θα είναι:

$$E_{ολ} = E_B + 2E_{B1} + 2E_{B2} = 10x - x^2 + 2\cdot 5x + 2\cdot(50 - x) = -x^2 + 10x + 100$$

Δηλ. $E(x) = -x^2 + 10x + 100$

Θα μελετήσουμε την συνάρτηση E(x) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$

$E'(x) = -2x + 10$

Έχουμε $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

και $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 10 > 0 \Leftrightarrow x < 5$ άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

	$-\infty$	0		5		10	$+\infty$
$E'(x)$			+	0	$-$		
$E(x)$			↗	τ. ε	↘		

Άρα έχουμε ότι:

Η E είναι γνησίως αύξουσα $(0,5]$ και είναι γνησίως φθίνουσα $[5,10)$

Η E παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (το οποίο είναι και ολικό) στη θέση $x_o = 5$ με τιμή

$$E(5) = -5^2 + 10\cdot 5 + 100 = -25 + 50 + 100 = 125\ dm^2$$

Άρα το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια όταν $x = 5$

Δ2 **α)** Έχουμε $2s^2 - 5s + 2 = 0$. Λύνοντας με διακρίνουσα έχουμε ότι:

$s = \frac{1}{2}$ ή $s = 2$

Αν $s = \frac{1}{2}$ τότε είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές που είναι άτοπο.

Άρα $s = 2$

β) Από τον τύπο της διακύμανσης έχουμε:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)}{\nu}\right\}\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\overline{x}^2\Leftrightarrow s^2=\overline{x^2}-\overline{x}^2$$

Άρα έχουμε $s=2\Leftrightarrow s^2=4\Leftrightarrow\overline{x^2}-\overline{x}^2=4\Leftrightarrow\overline{x^2}-64=4\Leftrightarrow\overline{x^2}=68$

Δ3 Έχουμε $x_1=5$ και $x_i>5$ για όλα τα i από 2 έως 15. Η E στο διάστημα $[5,10)$ είναι γνησίως φθίνουσα και $x_i\in[5,10)$ άρα:

$x_1<x_2<\ldots<x_{15}\Rightarrow E(x_1)>E(x_2)>\ldots>E(x_{15})$ οπότε $y_{\max}=E(x_1)$ και $y_{\min}=E(x_{15})$

Οπότε $E(x_1)=E(5)=125$ και $E(x_2)=E(9)=109$

Άρα $R=y_{\max}-y_{\min}=125-109=16$

$y_1>-4x_1+9\cdot16+1\Leftrightarrow -x_1^2+10x_1+100>-4x_1+9\cdot16+1\Leftrightarrow -x_1^2+14x_1-45>0$

$\Delta=16$ άρα $x_{1,2}=\dfrac{-14\pm4}{-2}=\begin{cases}x_1=9\\x_2=5\end{cases}$ άρα $-x_1^2+14x_1-45>0$ για $x\in(5,9)$ άρα

$B=\{A_2(x_2,y_2),\ldots,A_{14}(x_{14},y_{14})\}$ οπότε έχουμε $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{13}{15}$

Επιμέλεια:

Μίλτος Τσαλιγόπουλος – Βασίλης Μήτρου – Γιώργος Πανούσης