ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 304 σχολ. βιβλίου

Α2. Θεωρία σελ. 247 σχολ. βιβλίου

Α3. Θεωρία σελ. 222 σχολ. βιβλίου

Α4. α) Λ , β) Σ , γ) Σ , δ) Λ , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η δοσμένη σχέση γράφεται

$|z-2|^2+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|\cdot 2=0$

Αν $|z-2|=y$ είναι $y^2+y-2=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=-2$.

Όμως $y=|z-2|>0$, άρα $|z-2|=1$

Οπότε ο γ τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα 1.

Εξ άλλου είναι $|z|=|z-2+2| \leq |z-2|+|2| = 1+2=3$ άρα $|z| \leq 3$.

B2. Είναι $z_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}\,i}{2}$ και $z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2}$, οπότε $|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow$
$\left|\frac{2\sqrt{4\gamma-b^2}}{2}\right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - b^2 = 4$ (1). Επειδή z_1

ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B1 είναι: $\left(-\frac{b}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\gamma-b^2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}+2\right)^2 + \frac{4\gamma-b^2}{4} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4} + 2b + 4 + \gamma - \frac{b^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2b + \gamma = -3$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $b=-4$ και $\gamma = 5$.

B3. Έστω $|v| \geq 4$. Έχουμε $v^3 + a_2v^2 + a_1v + a_0 = 0 \Leftrightarrow$
$v^3 = -a_2v^2 - a_1v - a_0$. Άρα $|v|^3 = |-a_2v^2 - a_1v - a_0| =$
$= |a_2v^2 + a_1v + a_0|$ Λόγω της τριγωνικής ανισότητας
είναι $|v|^3 = |a_2v^2 + a_2v + a_0| \leq |a_2v^2| + |a_1v| + |a_0| =$
$|a_2||v^2| + |a_1|\cdot|v| + |a_0|$. Από B1 είναι $|a_0| \leq 3$, $|a_1| \leq 3$,
$|a_2| \leq 3$, άρα $|a_2v^2 + a_1v + a_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1)$.

Η τελευταία γράφεται $|v|^3 \leq 3\frac{|v|^3-1}{|v|-1}$ (είναι $|v|-1>0$
αφού $|v| \geq 4$) $\Leftrightarrow$
$|v|^3(|v|-1) \leq 3(|v|^3-1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3$.
Όμως $4|v|^3 - 3 < 4|v|^3$ άρα $|v|^4 \leq 4|v|^3 \Leftrightarrow$
$|v| < 4$ που είναι άτοπο. Άρα $|v| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ η δεδομένη σχέση γράφεται:

$$(f(x)+x)(f(x)+x)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \iff \left[\frac{(f(x)+x)^2}{2}\right]' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$$

$$\iff \frac{(f(x)+x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Για $x=0$: $\frac{1}{2} = c$. Έτσι $\frac{(f(x)+x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \iff$

$(f(x)+x)^2 = x^2+1$.

Θέτουμε $g(x) = f(x)+x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(0) > 0$ θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x)+x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x)+x = \sqrt{x^2+1} \iff f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f(g(x)) = \sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1$.

Άρα $\sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1 \iff$

$$\sqrt{g^2(x)+1} = g(x)+1. \qquad (1)$$

Πρέπει $g(x)+1 > 0 \iff x^3 + \frac{3x^2}{2} > 0 \iff x^2\left(x+\frac{3}{2}\right) > 0 \iff$ $x \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

Τότε από την (1) προκύπτει: $g^2(x)+1 = g^2(x)+1+2g(x)$ $\iff g(x) = 0 \iff x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \iff 2x^3+3x^2-2 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = 2x^3+3x^2-2$, $x \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

Είναι $\phi'(x) = 6x^2+6x = 6x(x+1)$. Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	$-3/2$		-1		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\phi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Προκύπτει τοπικό μέγιστο $\phi(-1) = -1$ και τοπικό ελάχιστο $\phi(0) = -2$.

Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της ϕ για $x \in [0,+\infty)$ είναι το $[-2,+\infty)$, ενώ για $x<0$ είναι $\phi(x)<0$. Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα για την ϕ στο $(0,+\infty)$ και επειδή η ϕ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3. Θέτουμε $K(x)=\int_{x-\pi/4}^{0} f(t)\,dt - f(x-\frac{\pi}{4})\cdot \varepsilon\varphi x$, $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

Η K είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{4}]$, ενώ επειδή $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t>0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ θα είναι

$\int_{-\pi/4}^{0} f(t)\,dt>0$, δηλαδή $K(0)>0$. Επίσης είναι

$K(\frac{\pi}{4}) = -f(0)\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1<0$. Έτσι όμως από το θεωρ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$ τέτοιο ώστε $K(x_0)=0$ ή

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f(x_0-\frac{\pi}{4})\,\varepsilon\varphi x_0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \left[5\,\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h} - \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} \right] =$

$= 5f'(1) + f'(1) = 6f'(1)$

Διότι • $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h} \cdot 5$

Θέτουμε $5h = u$ και αφού $h\to 0$ τότε $u \to 0$

έτσι $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} = 5 \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(1+u)-f(1)}{u} = 5f'(1)$.

• $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

Θέτουμε $-h = t$ και αφού $h\to 0$ τότε $t\to 0$

έτσι $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} = -\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(1+t)-f(1)}{t} = -f'(1)$.

Έτσι προκύπτει $6f'(1) = 0 \iff f'(1) = 0$.

Η f' τώρα δίνεται ότι είναι γνησίως αύξουσα

άρα • $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$

• $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ ενώ παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$.

Δ2. Είναι $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$, $x \in (0,+\infty)$.
Λόγω του Δ1 αφού στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο είναι $f(x) \geq f(1) = 1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ άρα $f(x) > 1$ για $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Έτσι $f(x)-1>0$ για $x \in (1,+\infty)$ και $x-1>0$, άρα $g'(x)>0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$.
Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\phi(x) = \int_x^{x+1} g(u)\,du$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $\phi'(x) = g(x+1) - g(x)$.
Όμως $x < x+1$ και επειδή g γνησίως αύξουσα θα είναι $g(x) < g(x+1)$ άρα $\phi'(x) > 0$ άρα ϕ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$\phi(8x^2+5) > \phi(2x^4+5) \overset{\phi\uparrow}{\Leftrightarrow} 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow$$
$$x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2,0) \cup (0,2).$$

Δ3. Είναι $g''(x) = \dfrac{(f(x)-1)'(x-1)-(f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

Για την f στο $[1,x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,x)$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\xi)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-1}{x-1} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(x)-1 = (x-1)f'(\xi)$

Άρα $g''(x) = \dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$.

Είναι $\xi < x \overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x)-f'(\xi) > 0$

Επίσης για $x>1 \Rightarrow x-1>0$.

Έτσι $g''(x)>0$ για κάθε $x>1$ άρα g κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \overset{a>1}{\Longleftrightarrow} g(x) = \dfrac{f(a)-1}{a-1}(x-a)$

$\Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης για την g στο $x=a$ είναι $y-g(a)=g'(a)(x-a)$

$\overset{g(a)=0}{\Longleftrightarrow} y = g'(a)(x-a)$. Αφού g κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή $g(x) \geq y \Rightarrow g(x) \geq g'(a)(x-a)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=a$. Άρα η εξίσωση $g(x) = g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση $x=a$