Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 194, το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Β. Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

Γ. Βλέπε σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου, αμέσως μετά την διατύπωση του θεωρήματος Rolle.

Δ. **1.** Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 91:

$$z + \overline{z} = 2\alpha \quad \text{με} \quad \alpha = Re(z).$$

2. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 185 με α = e: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142:

$$\{x/x \in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x \in B, \quad \mu\varepsilon \; g(x) \neq 0\}$$

4. Σωστό. Βλέπε το ΣΧΟΛΙΟ στη σελίδα 218 του σχολικού βιβλίου.

5. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 336 τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

ΘΕΜΑ 2

α. **i.** Η f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 12x^2 + 24\lambda x + \lambda - 1,$$
$$f''(x) = 24x + 24\lambda$$

Επειδή στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει καμπή, είναι $f''(-1) = 0$:

$$f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -24 + 24\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

ii. Επειδή $\lambda = 1$ είναι $\boxed{f(x) = 4x^3 + 12x^2}$ και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 24x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 24x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο $[-1, +\infty)$.

β. Θέτουμε $u = f(x)$. Επειδή

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}(4x^3 + 12x^2) = 0$$

είναι

$$\lim_{x\to -3}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ. i. Η ζητούμενη αρχική είναι η

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + c,\quad x \in \mathbb{R}$$

με c σταθερά, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = (x^4 + 4x^2 + c)' = 4x^3 + 12x^2 = f(x)$$

Το σημείο (0, 1) ανήκει στην γραφική παράσταση της F, οπότε $F(0) = 1$:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως

$$\boxed{F(x) = x^4 + 4x^3 + 1},\ x \in \mathbb{R}$$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -3$
Το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισούται με το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-3}^{0} |f(x)|dx$$

Στο διάστημα $[-3, 0]$ είναι $f(x) = 4x^2(x+3) \geq 0$, άρα

$$E = \int_{-3}^{0} f(x)dx$$

Τότε

$$E = F(0) - F(-3) = 1 + 26 = 27\ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 3

α. i) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = \frac{\pi}{4}$ και παίρνουμε:

$$f(\eta\mu\frac{\pi}{4}) + f(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πάλι, με x = 0 παίρνουμε:

$$f(\eta\mu 0) + f(\sigma\upsilon\nu 0) = 1 \Leftrightarrow f(0) + f(1) = 1$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση g: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) + x - 1,\qquad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

- Η g είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων· της f, και της $x - 1$.
- Είναι $g(0) = f(0) - 1$ και $g(1) = f(1) \overset{(\alpha i)}{=} 1 - f(0)$, οπότε
$$g(0) \cdot g(1) = -[f(0) - 1]^2 \quad \textbf{(1)}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση:
Αν $f(0) = 1$, τότε από (1) $\Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$. Η g θα έχει ρίζα το $x_0 = 0$ ή το $x_0 = 1$

2η περίπτωση:
Αν $f(0) \neq 1$, τότε από την (1) είναι: $g(0) \cdot g(1) < 0$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Bolzano για την g στο $[0, 1]$, έτσι θα υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.
Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε
$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1,$$
το οποίο απόδειξε το ζητούμενο.

β. i. Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$$h(x) = f(x) - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα της f, η οποία από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη, και της πολυωνυμικής $-\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$, με παράγωγο
$$h'(x) = f'(x) - \sqrt{2}$$
- Η h έχει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Πραγματικά, είναι
$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$
Ακόμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
- Το $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμό της h.

Επομένως, εφαρμόζεται το θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο $h'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$:
$$h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$
Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι
$$y - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow y=\sqrt{2}\,x-\frac{1}{2}$$

ii) Είναι

$$f(0)+f(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1-f(0)$$

και

$$f(\text{ημx}) + f(\text{συνx}) = 1 \Leftrightarrow f(\text{συνx}) = 1 - f(\text{ημx}).$$

Αντικαθιστούμε στο όριο και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-f(0))-(1-f(\eta\mu x))}{\eta\mu x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x-0} \quad \mathbf{(2)}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση y = ημx. Επειδή

$$\lim_{x\to 0}(\text{ημx})=\text{ημ}0=0$$

το y τείνει στο 0. Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x-0}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0} \quad \mathbf{(3)}$$

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, από τον ορισμό της $f'(0)$ είναι

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0) \qquad \mathbf{(4)}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την $f'(0)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1$ και παίρνουμε:

$$[f(\text{ημx})+f(\text{συνx})]'=(1)' \Leftrightarrow [f(\text{ημx})]'+[f(\text{συνx})]'=0$$
$$\Leftrightarrow (\text{ημx})'f'(\text{ημx})+(\text{συνx})'f'(\text{συνx})=0$$
$$\Leftrightarrow \text{συνx}\cdot f'(\text{ημx})-\eta\mu x\cdot f'(\text{συνx})=0$$

Από εδώ, για $x=0$ έχουμε

$$\text{συν}0\cdot f'(\text{ημ}0)-\eta\mu 0\cdot f'(\text{συν}0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (2), (3) και (4):

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x}=f'(0)=0$$

ΘΕΜΑ 4

Α. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = e^x - x - 1,\ x\in\mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = e^x - 1,\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως η g, ως συνεχής στο $x_0 = 0$:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

άρα, έχει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$, οπότε

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνουμε, ότι η ισότητα

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow e^x = x + 1$$

αληθεύει ακριβώς όταν x=0, αφού η θέση ελαχίστου της συνάρτησης είναι μόνον η $x = 0$.

Β. **α. i.** Θέτουμε $u = x - xt$, οπότε $du = -x dt$. Για $t = 0$ είναι $u = x$ και για $t = 1$ είναι $u = 0$. Τότε:

$$x\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt = \int_x^0 e^{f(u)}(-du) = \int_0^x e^{f(u)}du = \int_0^x e^{f(t)}dt.$$

Τότε για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\,x\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\int_0^x e^{f(t)}dt$$

οπότε

$$Re(z) = Im(z) = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

Στην συνέχεια

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\int_0^x e^{f(t)}dt \Leftrightarrow z = (1+i)\int_0^x e^{f(t)}dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

Επειδή $e^{f(t)} > 0$, για κάθε $x \geq 0$ είναι $\int_0^x e^{f(t)}dt \geq 0$, επομένως

$$\frac{z}{1+i} = Re(z) = Im(z) \geq 0, \text{για κάθε } x \geq 0$$

ii. Βρήκαμε $\frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)}dt \geq 0$, οπότε

$$\left|\frac{z}{1+i}\right| = \left|\int_0^x e^{f(t)}dt\right| = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

άρα

$$\frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x e^{f(t)}dt\ , \qquad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Σύμφωνα με την σχέση αυτή και την δεύτερη από τις δοσμένες είναι:

$$\int_0^x e^{f(t)}dt = \int_0^x [f(t) + e^t]\,dt + f(\alpha) - 1 \quad (\mathbf{1}), \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Επειδή η f και η e^t είναι συνεχείς, θα είναι συνεχείς

- η σύνθεση $e^{f(t)}$ και
- το άθροισμα $f(t) + e^t$,

επομένως οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x e^{f(t)}dt\ ,\qquad \int_0^x [f(t)+e^t]\,dt$$

είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^x e^{f(t)}dt\right)' = e^{f(x)},\qquad \left(\int_0^x [f(t)+e^t]\,dt\right)' = f(x)+e^x$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left(\int_0^x e^{f(t)}dt\right)' = \left(\int_0^x [f(t)+e^t]\,dt + f(\alpha) - 1\right)'$$

ή, τελικώς:

$$e^{f(x)} = f(x)+e^x,\ \text{για κάθε } x \geq 0$$

β. Για κάθε $x_1,\ x_2 \geq 0$ από την (α.ii) έχουμε

$$e^{f(x_1)} = f(x_1)+e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{f(x_1)} - f(x_1)$$

$$e^{f(x_2)} = f(x_2)+e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2} = e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{f(x_1)} - f(x_1) < e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow g\big(f(x_1)\big) < g\big(f(x_2)\big)$$

με g την συνάρτηση του ερωτήματος Α, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, στο οποίο παίρνει τιμές η f. Επομένως

$$g\big(f(x_1)\big) < g\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x_1,\ x_2 \geq 0$,

αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$

που σημαίνει, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f ως γνησίως αύξουσα, είναι $1-1$, άρα έχει αντίστροφη.
Πάλι η f, ως γνησίως αύξουσα και συνεχής, έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left[f(0),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

- Η σχέση $e^{f(x)} = f(x)+e^x$ επειδή $f(x)\geq 0$ δίνει

$$e^{f(x)} \geq e^x \Leftrightarrow f(x) \geq x$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- Για $x = 0$ πάλι από την $e^{f(x)} = f(x)+e^x$ παίρνουμε

$$e^{f(0)} = f(0)+1.$$

Έτσι, το $f(0)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^x = x + 1$. Από το ερώτημα Α. η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση $x = 0$, που συνεπάγεται, ότι

$$\boxed{\boldsymbol{f(0)=0}}\quad (\mathbf{2})$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$$\left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Έστω y = f(x) με $x \geq 0$. Από την $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ έχουμε:

$$e^y = y + e^x \Leftrightarrow e^x = e^y - y$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση ως προς x ≥ 0, αφού $e^y - y \geq 1$. Τότε:

$$e^x = e^y - y \Leftrightarrow x = \ln(e^y - y)$$

Για την τιμή αυτή του x είναι f(x) = y. Πραγματικά

$$e^{f(\ln(e^y-y))} - f(\ln(e^y - y)) = e^{\ln(e^y-y)} = e^y - y$$

Η g ως γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ είναι 1-1, έτσι $f(\ln(e^y - y)) = y$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - x), \qquad x \in [0, +\infty)$$

δ. Για x = 0 από την (1) παίρνουμε:

$$\int_0^0 e^{f(t)}dt = \int_0^0 [f(t) + e^t]\,dt + f(\alpha) - 1 \Leftrightarrow f(\alpha) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(\alpha) = 1}} \ \ \mathbf{(3)}$$

Για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα [0, α], α > 0, γιατί είναι συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα, ως παραγωγίσιμη από υπόθεση στο $(0, +\infty)$. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον, ξ∈(0, α) με

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = f'(\xi)$$

ή λόγω των (2) και (3):

$$\frac{1 - 0}{\alpha} = f'(\xi) \ \ ή \ \ \alpha f'(\xi) = 1.$$