ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2009
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. , Β. , Γ. Βλέπε στη θεωρία

Δ. **1. Σωστό** (Είναι $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w = z\cdot\overline{w}+\overline{z\cdot\overline{w}} = 2\,\mathrm{Re}(z\cdot\overline{w})\in\mathbb{R}$)

2. Λάθος (Είναι το $(0,+\infty)$ αφού πρέπει $t\in(0,+\infty)$)

3. Λάθος (Το $[f(4)]$ είναι σταθερός, άρα $[f(4)]'=0$)

4. Σωστό ($[\ln(\alpha x)]' = \frac{1}{\alpha x}\cdot(\alpha x)' = \frac{1}{\alpha x}\cdot\alpha = \frac{1}{x}$)

5. Σωστό (Η f είναι "$1-1$", άρα η εξίσωση $f(x)=2009$ έχει το πολύ μια λύση)

ΘΕΜΑ 2ο

1. Είναι
$$\big||z|-|1|\big|\le|z-1|\le|z|+|1|\Rightarrow|2-1|\le\alpha\le2+1\Rightarrow1\le\alpha\le3.$$

2. Από
$$|z-1|=\alpha\Rightarrow|z-1|^2=\alpha^2\Rightarrow(z-1)(\overline{z}+1)=\alpha^2\Rightarrow$$
$$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=\alpha^2\Rightarrow|z|^2-(z+\overline{z})+1=\alpha^2\Rightarrow$$
$$2^2-2\mathrm{Re}(z)+1=\alpha^2\Rightarrow5-\alpha^2=2\mathrm{Re}(z)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mathrm{Re}(z)=\frac{5-\alpha^2}{2}$$

3. Έστω $\alpha=1$. Τότε $\mathrm{Re}(z)=\frac{5-1^2}{2}=2$.

ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Άρα $z = 2 + yi, \quad y \in R$ και από

$|z| = 2 \Rightarrow \sqrt{2^2 + y^2} = 2 \Rightarrow 4 + y^2 = 4 \Rightarrow y = 0$. Επομένως είναι $z = 2 \in R$.

(Όμοια για $\alpha = 3$).

4. Αν $z \in I$, τότε είναι

$$Re(z) = 0 \Rightarrow \frac{5 - \alpha^2}{2} = 0 \Rightarrow 5 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{5}.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

α. Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στο διάστημα $(1, +\infty)$

i. Λύνουμε την εξίσωση

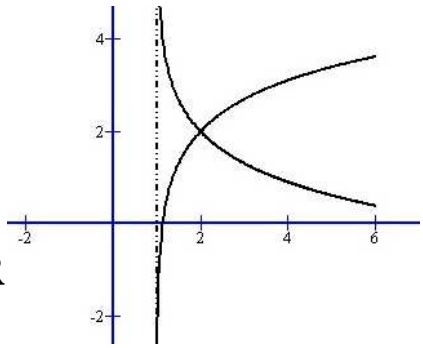
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 + \ln(x-1) = 2 - \ln(x-1) \Rightarrow 2\ln(x-1) = 0 \Rightarrow$

$\ln(x-1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Άρα οι C_f , C_g έχουν κοινό το σημείο $M(2,2)$

ii. Είναι $f'(x) = 0 + \frac{1}{x-1} > 0$ για $x \in (1, +\infty)$, άρα η f είναι γν. αύξουσα και ως τέτοια έχει σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = R$$



ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Είναι $g'(x) = 0 - \dfrac{1}{x-1} < 0$ για $x \in (1, +\infty)$, άρα η g είναι γν. φθίνουσα και ως τέτοια έχει σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{x \to +\infty} g(x), \lim_{x \to 1^+} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

β. Η εφαπτομένη της C_f στο κοινό σημείο τους $M(2,2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_f = f'(2) = \dfrac{1}{2-1} \Rightarrow \lambda_f = 1$.

Η εφαπτομένη της C_g στο κοινό σημείο τους $M(2,2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_g = g'(2) = -\dfrac{1}{2-1} \Rightarrow \lambda_g = -1$.

Επειδή ισχύει $\lambda_f \cdot \lambda_g = 1 \cdot (-1) = 1$, οι εφαπτόμενες των C_f , C_g στο $M(2,2)$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Β. Για την f ισχύει στο διάστημα $[0,5]$ το θεώρημα μεγίστης και ελαχίστης τιμής, επομένως υπάρχουν x_ε και x_μ που ανήκουν στο $[0,5]$, τέτοια, ώστε για κάθε $x \in [0,5]$ ισχύει $f(x_\varepsilon) \le f(x) \le f(x_\mu)$.

Επομένως:

Για $x = 1$: $\quad f(x_\varepsilon) \le f(1) \le f(x_\mu)$

Για $x = 2$: $\quad f(x_\varepsilon) \le f(2) \le f(x_\mu) \Rightarrow 2f(x_\varepsilon) \le 2f(2) \le 2f(x_\mu)$

Για $x = 4$: $\quad f(x_\varepsilon) \le f(4) \le f(x_\mu)$

Με πρόσθεση κατά μέλη: $4f(x_\varepsilon) \le f(1) + 2f(2) + f(4) \le 4f(x_\mu) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_\varepsilon) \le \frac{f(1) + 2f(2) + f(4)}{4} \le f(x_\mu)$$

Δηλαδή το $\dfrac{f(1) + 2f(2) + f(4)}{4}$ ανήκει στο σύνολο τιμών

ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

$f([0,5]) = [f(x_\varepsilon)\ ,\ f(x_\mu)]$, άρα υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $\xi \in [1,5]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(1)+2f(2)+f(4)}{4}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται: $g(x) = \int_0^1 tf(xt)dt$.

i. Θέτουμε $xt = u \Rightarrow (xt)'dt = du \Rightarrow xdt = du \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}du.$

$$\begin{cases} \text{Για } t = 1 \Rightarrow u = x \\ \text{Για } t = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

Άρα: $g(x) = \int_0^1 tf(xt)dt = \int_0^x \frac{u}{x} f(u) \frac{1}{x} du = \frac{1}{x^2}\int_0^x uf(u)du \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt.$$

ii. Είναι

$$g(0) = \int_0^1 tf(0\cdot t)dt = \int_0^1 tf(0)dt = f(0)\int_0^1 tdt = f(0)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{f(0)}{2}.$$

Και

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2} = g(0)$$

Άρα η g συνεχής στο $x_0 = 0$.

ΝΕΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

iii. Για τη $g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με

$$g'(x) = \frac{x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$$

- Και $g(1) = \int_0^1 tf(t)dt$

$$g(2) = \frac{1}{2^2}\int_0^2 tf(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^2 tf(t)dt = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 tf(t)dt + \int_1^2 tf(t)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^1 tf(t)dt + 3\int_0^1 tf(t)dt\right] = \frac{1}{4}\cdot 4\int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt = g(1)$$

Επομένως ισχύει για τη g στο $[1,2]$ το θεώρημα του Rolle.

iv. Από το 3ο ερώτημα (θεώρημα Rolle) έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{\xi^2 f(\xi) - 2\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^3} \Rightarrow \xi^2 f(\xi) - 2\int_0^\xi tf(t)dt = 0 \Rightarrow$$

$$f(\xi) = 2\cdot\frac{1}{\xi^2}\int_0^\xi tf(t)dt \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = 2g(\xi)$$

ΛΕΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ