

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
Στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
22 Απριλίου 2009

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A έχει ελάχιστο σε σημείο $x_0 \in A$;

3 μονάδες

B. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και τι εκφράζει γεωμετρικά η $f'(x_0)$;

5 μονάδες

Γ. Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και συνεχής στο x_0 . Ισχύει το αντίστροφο;

7 μονάδες

Δ. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστούς (Σ) λανθασμένους (Λ) τους ισχυρισμούς που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τον αριθμό κάθε ενός από αυτούς και δίπλα του τον χαρακτηρισμό σας.

1. Για τους μιγαδικούς z, w ισχύει ότι η παράσταση $\overline{z \cdot w} + \overline{z} \cdot \overline{w}$ είναι πραγματικός αριθμός.

2. Πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \int_1^x e^{t+\ln t} dt$ είναι το $\mathbb{R}$.

3. Ισχύει $[f(4)]' = f'(4)$.

4. Αν Για κάθε $x > 0$ ισχύει $[\ln(ax)]' = \frac{1}{x}$, όπου a θετικός σταθερός αριθμός.

5. Αν η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η ευθεία $y = 2009$ τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός z με $|z| = 2$ και έστω ότι $|z - 1| = a$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

1. Να δείξετε ότι ισχύει $1 \leq a \leq 3$.

6 μονάδες

2. Να δείξετε ότι $\operatorname{Re}(z) = \frac{5 - a^2}{2}$.

6 μονάδες

3. Να δείξετε ότι όταν ο a παίρνει την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή του, τότε ο z είναι πραγματικός.

7 μονάδες

4. Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία ο z είναι φανταστικός.

6 μονάδες

ΘΕΜΑ 3^ο

- A. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2 + \ln(x - 1)$ και $g(x) = 2 - \ln(x - 1)$ με $x > 1$ και C_f , C_g είναι οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις τους.

- α. Να βρεθούν:

- i. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

4 μονάδες

- ii. Η μονοτονία και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g

7 μονάδες

β. Να αποδειχθεί ότι οι C_f και C_g έχουν κάθετες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους.

7 μονάδες

B. Αν η f είναι συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[0, 5]$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 5]$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 2f(2) + f(4)}{4}.$$

7 μονάδες

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = \int_0^1 tf(xt)dt$ $t, x \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt$, $x \neq 0$.

6 μονάδες

ii. Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

6 μονάδες

iii. Αν ισχύει $\int_1^2 tf(t)dt = 3 \int_0^1 tf(t)dt$, τότε να δείξετε ότι για την $g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt$ ισχύει στο διάστημα $[1, 2]$ το θεώρημα Rolle.

6 μονάδες

iv. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $2g(\xi) = f(\xi)$.

7 μονάδες

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα και ερωτήματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ